
Mathematik IT 3 (Analysis)

für die Studiengänge Informatik/Diplom, Informatik/Bachelor, Informations- und
Medientechnik/Bachelor und eBusiness/ Bachelor, 3. Semester im Wintersemester 2010/2011

Aufgaben zur Sonderübung am 03.02.2011

Aufgabe 1

Die Mengen $A, B \subseteq \mathbb{R}$ seien beschränkt und für alle $b \in B$ gelte $b \neq 0$. Was läßt sich über die Menge $C := \left\{ \frac{a}{b} \mid a \in A, b \in B \right\}$ aussagen?

- ☐ (a) Die Menge C ist beschränkt.
- ☐ (b) Die Menge C ist unbeschränkt.
- ☐ (c) Es ist keine Aussage über die Beschränktheit von C möglich.

Aufgabe 2

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine reelle Nullfolge und die reelle Folge $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nehme nur endlich viele Werte an. Was läßt sich über die Folge $(a_n \cdot b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aussagen?

- ☐ (a) $(a_n \cdot b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist konvergent.
- ☐ (b) $(a_n \cdot b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist divergent.
- ☐ (c) Es ist keine Aussage über die Konvergenz von $(a_n \cdot b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ möglich.

Aufgabe 3

Die stetig differenzierbare Funktion $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ erfülle $f' \left(\frac{a+b}{2} \right) > 0$ und f habe keine Nullstelle in (a, b) . Dann gilt:

- ☐ (a) f ist auf (a, b) streng monoton steigend.
- ☐ (b) f ist auf (a, b) nicht streng monoton steigend.
- ☐ (c) Es ist keine Aussage über die Monotonie von f auf (a, b) möglich.

Aufgabe 4

Es seien $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ zwei stetige Funktionen mit $\int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx = 0$. Dann gilt:

- ☐ (a) $f(x) + g(x) = 0$ für alle $x \in (a, b)$.
- ☐ (b) $f(x) \cdot g(x) = 0$ für alle $x \in (a, b)$.
- ☐ (c) Die Aussagen (a) und (b) müssen nicht erfüllt sein.

Aufgabe 5

- (a) Untersuchen, ob die Menge $X = \left\{ \frac{1}{n^2+1} + \frac{1+(-1)^n}{2(n+1)} \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$ nach oben oder unten beschränkt ist. Bestimmen Sie ggf. $\sup(X)$ und $\inf(X)$.
- (b) Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen $z \in \mathbb{C}$, die die Gleichung $\frac{1}{2}z^6 = -3z^5 - \frac{13}{|\sqrt{3}+i|}z^4$ erfüllen und stellen Sie diese in der Form $z = a + bi$ dar.

Aufgabe 6 Bestimmen Sie die Häufungswerte der Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$a_n := \frac{1}{2\sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})}, \quad n \geq 1 \quad \text{und} \quad b_n := \left(n - 5 \left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor\right) \cdot \frac{3n^5 + n \sin(2n\pi)}{4n^5 + n}, \quad n \geq 1$$

Aufgabe 7 Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz:

- (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3k+1}}{(k+2)!}$, wobei $x \in \mathbb{R}$ beliebig, aber *fest* gewählt sei
- (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n) + \cos(n^2)}{3e^n 5^{n-1}}$
- (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + 1}$

Aufgabe 8 Bestimmen Sie den Definitionsbereich, auf dem die Funktion

$$f(x) := \frac{1+x}{1+x^3}$$

sinnvoll definiert werden kann. Prüfen Sie die Funktion f auf Stetigkeit und auf die Möglichkeit der stetigen Ergänzung.

Aufgabe 9 Berechnen Sie die Grenzwerte $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1) + x-1}{\sin(x-1)}$ und $\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

Aufgabe 10

Gegeben seien die folgenden Funktionen $f: D \rightarrow \mathbb{R}$. Geben Sie den größtmöglichen Definitionsbereich D der Funktionen an und berechnen Sie die erste Ableitung der Funktionen f . Falls f nicht auf dem gesamten Definitionsbereich differenzierbar sein sollte, dann geben Sie zusätzlich eine Begründung an, warum f für die entsprechenden $x \in D$ nicht differenzierbar ist.

(a) $f(x) = |\sin(x) \cos(x)|$

(b) $f(x) = \frac{x-4}{|\sqrt{x-2}|}$

(Hinweis zu (a): Untersuchen Sie insbesondere auch die Differenzierbarkeit in den Nullstellen von f !)

Aufgabe 11 Berechnen Sie das bestimmte Integral $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{3+x^2} dx$ durch eine geeignete Substitution.

Aufgabe 12

Führen Sie für die Funktion $f_a(x) = \frac{x^2 - 2ax + 2a^2}{x-a}$ für beliebiges $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ eine vollständige Kurvendiskussion durch (maximaler Definitionsbereich, Wertebereich, Symmetrien, Nullstellen, Unstetigkeitsstellen, Asymptoten, lokale Extrema und Wendepunkte, Monotoniebereiche sowie asymptotisches Verhalten an Unstetigkeitsstellen und im Unendlichen).