

Mathematik IT 3 (Analysis)

für die Studiengänge Informatik/Diplom, Informatik/Bachelor, Informations- und Medientechnik/Bachelor
und eBusiness/ Bachelor, 3. Semester im Wintersemester 2010/2011

Aufgaben zur Übungsstunde am 28.10.2010

Aufgabe 1: Welche der folgenden Mengen bilden mit der üblichen Addition und Multiplikation einen Körper?

- (a) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ (b) $(\mathbb{Z}_2, +, \cdot)$ (c) $(\mathbb{N}, +, \cdot)$

Aufgabe 2: Beweisen Sie die folgenden Behauptungen im Körper der reellen Zahlen $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ unter alleiniger Verwendung der Körperaxiome:

- (a) $(-1) \cdot (-1) = 1$ (b) $(-a) \cdot (-a) = a^2$ (c) Es gibt kein multiplikatives Inverses von 0.

Aufgabe 3: Beweisen Sie die folgenden Behauptungen unter alleiniger Verwendung der Anordnungsaxiome für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$:

- (a) $a < b, c \in \mathbb{R} \Rightarrow a + c < b + c$ (b) $a < b \Rightarrow -b < -a$

Aufgabe 4: Beweisen Sie, dass das Vollständigkeitsaxiom in $\mathbb{Q}$ nicht gilt.

Aufgabe 5: Untersuchen Sie die folgenden Mengen auf die Existenz von Supremum und Infimum und geben Sie diese an, falls sie existieren.

- (a) $A_n := \{x \in \mathbb{Q} \mid 8 \leq x^n \leq 64\}$ für $n = 2, 3$
(b) $B := \left\{ 1 - \frac{(-1)^n}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$
(c) $C := \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0 \text{ und } x^2 + 2x + 2 > 5\}$

Aufgabe 6:

Untersuchen Sie die folgenden Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auf Konvergenz und bestimmen Sie ggf. ihren Grenzwert.

- (a) $a_n := \frac{2n^2 + 4n}{3n^2 + n}$
(b) $a_n := \frac{7n^3 + 4n^2 - 4n - 11}{3n^2 - 2n + 1}$
(c) $a_n := \sqrt{n + \frac{1}{n}} - \sqrt{n - \frac{1}{n}}$

Aufgabe 7: Geben Sie eine explizite und eine rekursive Darstellung der nachfolgenden Folgen an und untersuchen Sie diese auf Konvergenz:

- (a) $-2, 4, -8, 16, -32, 64, \dots$ (b) $1, \frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \frac{8}{27}, \frac{16}{81}, \dots$

Aufgabe 8: Beweisen Sie unter Verwendung der ε -Definition des Konvergenzbegriffes, dass die Folge der $a_n := \frac{n}{n+1}$ gegen 1 konvergiert.