

Mathematik IT 3 (Analysis)

für die Studiengänge Informatik/Diplom, Informatik/Bachelor, Informations- und Medientechnik/Bachelor
und eBusiness/ Bachelor, 3. Semester im Wintersemester 2010/2011

Aufgaben zur Übungsstunde am 04.11.2010

Aufgabe 1: Beweisen Sie folgende Aussagen:

- (a) Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ und beliebiges $\varepsilon > 0$ gilt: $2|ab| \leq \varepsilon^2 a^2 + \frac{1}{\varepsilon^2} b^2$.
- (b) Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ und beliebiges $\varepsilon > 0$ gilt: $(a+b)^2 \leq (1+\varepsilon^2)a^2 + (1+\frac{1}{\varepsilon^2})b^2$.
- (c) Sei $y \in \mathbb{R}$ fixiert. Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $4xy \leq 2x^2 + 2y^2$.

Aufgabe 2: Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für die gilt: $|x-2| \leq |x+2|$.

Aufgabe 3: Gegeben seien zwei konvergente Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0$. Außerdem existiere ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $b_n \neq 0$ für alle $n \geq n_0$ gilt. Zeigen Sie, dass unter den genannten Voraussetzungen die Folge $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert und es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}$$

Aufgabe 4: Untersuchen Sie die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit den nachfolgend angegebenen Gliedern auf Konvergenz und bestimmen Sie ggf. den Grenzwert.

- (a) $a_0 := 1$ und $a_{n+1} := \frac{a_n}{a_n+2}$ für $n \geq 0$
- (b) $a_0 := a \in \mathbb{R}, a_1 := b \in \mathbb{R}$ und $a_n := \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n-2})$ für $n \geq 2$.
- (c) $a_n := \frac{2n(n+1)(n-1)}{n^3+1}, n \geq 0$
- (d) $a_n = \sqrt{2n+\sqrt{n}} - \sqrt{2n-\sqrt{n}}, n \geq 0$.

(Hinweis zur (a): Der Grenzwert muss nicht berechnet werden.)

Aufgabe 5: Bestimmen Sie die Häufungswerte der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit den nachfolgend angegebenen Gliedern:

- (a) $a_n := (-1)^n + \frac{1}{n}$
- (b) $a_n := \begin{cases} \frac{1}{n} & , \quad n \text{ gerade} \\ 1 & , \quad n \text{ ungerade} \end{cases}$
- (c) $a_n := (-1)^n \sqrt[n]{3}$
- (d) $a_n := \frac{1+(-1)^n n^2}{2+3n+n^2}$
- (e) $a_n := n - 5 \cdot \left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor + \sqrt{\frac{1}{n}}$, wobei $\lfloor t \rfloor := m \in \mathbb{Z}$, falls $m \leq t < m+1$.