Brandenburgische
Technische Universität
Cottbus

Lehrstuhl Mathematik, insbesondere
Numerische und Angewandte Mathematik
Prof. Dr. L. Cromme

Mathematik IT 3 (Analysis)

für die Studiengänge Informatik/Diplom, Informatik/Bachelor, Informations- und Medientechnik/Bachelor und eBusiness/ Bachelor, 3. Semester im Wintersemester 2010/2011

Aufgaben zur Übungsstunde am 18./19.11.2010

Aufgabe 1: Untersuchen Sie die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Häufungswerte:

(a) $a_n := \left(1+\frac{1}{n^8}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}n\right)$

(b) $a_n := \left(n-7\left\lfloor\frac{n}{7}\right\rfloor\right)\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)+\frac{3n^2+7n}{2n^2-3}$

Aufgabe 2: Untersuchen Sie die folgenden unendlichen Reihen auf Konvergenz:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{n!}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{n^2+7n+1}{\exp(n)}\right)$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{1}{2n}\exp\left(\frac{n^5-3n+7}{n^6+2n^2+2}\right)\right]^n$

(d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n+1}{8^n+\sqrt{3^n}}$

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+2}}{5n+1}$

(f) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty}\left(\frac{5}{7}\right)^{n-1}$

(g) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(3n-1)(3n+2)}$

(h) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{n-1}$

Sind die Reihen in (b), (c), (e) und (h) absolut konvergent? Berechnen Sie für (f) und (g) den Grenzwert der Reihe.

Aufgabe 3: Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

(a) Die Reihe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ konvergiert genau dann absolut, wenn diese Reihe konvergiert.

(b) Ist $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$, dann konvergiert die Reihe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_n$.

(c) Ist $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ eine konvergente Reihe, dann konvergiert auch die Reihe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_{2n}$.

(d) Ist $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ eine *absolut* konvergente Reihe, dann konvergieren auch die Reihen $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_{2n}$ und $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_{2n-1}$ absolut.

Aufgabe 4: Das Cauchy-Produkt zweier unendlicher Reihen $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty}b_n$ wird definiert durch

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_n := \left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}b_n\right) \qquad \text{mit} \qquad c_n := \sum_{k=0}^{n}a_{n-k}b_k.$$

Zeigen Sie, dass die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ konvergiert, aber das Cauchy-Produkt der Reihe mit sich selbst divergiert.