Brandenburgische
Technische Universität
Cottbus

Lehrstuhl Mathematik, insbesondere
Numerische und Angewandte Mathematik
Prof. Dr. L. Cromme

Mathematik IT 3 (Analysis)

für die Studiengänge Informatik/Diplom, Informatik/Bachelor, Informations- und Medientechnik/Bachelor und eBusiness/ Bachelor, 3. Semester im Wintersemester 2010/2011

Aufgaben zur Übungsstunde am 02./03.12.2010

Aufgabe 1: Weisen Sie mit Hilfe des Folgenkriteriums der Stetigkeit nach, dass die folgenden Funktionen im angegebenen Punkt x_0 nicht stetig sind:

(a) $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$ in $x_0 := a \in \mathbb{Z}$

(b) $f(x) = \exp\left(\frac{1}{x-1}\right) \cdot \frac{1}{x}$ in $x_0 = 1$

(b) $f(x) = \exp\left(\frac{1}{x-1}\right) \cdot \frac{1}{x}$ in $x_0 = 0$

Aufgabe 2: Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Stetigkeit:

(a) $f(x) = \begin{cases} |x|+1 & , \quad x < 0 \\ (x+1)^2 & , \quad 0 \le x \le 3 \\ 19 & , \quad x > 3 \end{cases}$

(b) $g(x) = \frac{x^2+x-2}{x-1}, \quad x \neq 1$

(c) $f(x) = \big(x - \lfloor x \rfloor\big) \cdot \big(x + \lfloor x \rfloor\big)$

Aufgabe 3:

Beweisen Sie das $\varepsilon - \delta$-Kriterium der Stetigkeit: Eine Funktion $f : X \to Y$ mit $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ heißt genau dann stetig in $a \in X$, wenn es für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \delta(\varepsilon, a)$ gibt, so dass für alle $x \in X$ mit $|x - a| < \delta$ stets $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ folgt.

Aufgabe 4: Beweisen Sie mit Hilfe des $\varepsilon - \delta$-Kriteriums der Stetigkeit die folgenden Aussagen:

(a) Die Funktion $f(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ 1 & , \quad x \ge 0 \end{cases}$ ist in $x_0 = 0$ nicht stetig.

(b) Die Funktion $f(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ 1 & , \quad x \ge 0 \end{cases}$ ist für alle $x_0 \neq 0$ stetig.

(c) Die Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ ist stetig für alle $x \in [0, \infty)$.

(d) Seien $f : [a, b] \to \infty$ stetige Funktionen und $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ sei definiert durch $h(x) := \max\{f(x), g(x)\}$ für alle $x \in [a, b]$. Die Funktion h ist auf $[a, b]$ ebenfalls stetig.

Aufgabe 5:

(a) Skizzieren Sie die Menge $M := \{z \in \mathbb{C} \,\big|\, \mathrm{Im}((1-i)z) = 0\}$ in der komplexen Zahlenebene.

(b) Stellen Sie die komplexen Zahlen $v = \frac{5+5i}{1+2i} - \frac{5-5i}{1-2i}$ und $w = \frac{8-2i}{4-i}$ in der Form $a + bi$ dar.

Aufgabe 6 Seien $z = a + bi$ und $y = c + di$ zwei beliebige komplexe Zahlen. Beweisen Sie die folgenden Eigenschaften:

(a) $\overline{z+y} = \overline{z} + \overline{y}$ und $\overline{z-y} = \overline{z} - \overline{y}$

(b) $\overline{z \cdot y} = \overline{z} \cdot \overline{y}$ und $\overline{\left(\frac{z}{y}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{y}}$

(c) $\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$ und $\mathrm{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$

Aufgabe 7 Sei $a \in \mathbb{C}, a \neq 1$ und $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$(1-a)(1 + a + a^2 + \ldots + a^n) = 1 - a^{n+1}$$

gilt und bestimmen Sie damit den Wert der *endlichen geometrischen Reihe* $\sum_{k=0}^{n} a^k$.

Aufgabe 8 Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen $z \in \mathbb{C}$, für die folgende Gleichungen erfüllt sind:

(a) $(2+i)z - 5 - 2i = 8 - 3i$.

(b) $z^2 = -25$

(c) $z^2 + 4z = -5$

(d) $z^3 = 1$

(e) $z^8 = 1$

(f) $z + z^2 + z^3 + z^4 = 0$