

Mathematik IT 3 (Analysis)

für die Studiengänge Informatik/Diplom, Informatik/Bachelor, Informations- und Medientechnik/Bachelor
und eBusiness/ Bachelor, 3. Semester im Wintersemester 2010/2011

Aufgaben zur Übungsstunde am 16./17.12.2010

Aufgabe 1: Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit im Punkt $x_0 = 0$:

$$(a) f(x) = \begin{cases} 2x & , \quad x \leq 0 \\ \sin(2x) & , \quad x > 0 \end{cases}$$

$$(b) f(x) = \begin{cases} 1 - x & , \quad x \leq 0 \\ e^{-x} & , \quad x > 0 \end{cases}$$

$$(c) f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

Aufgabe 2: Für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$ sei die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$f(x) := \begin{cases} 0 & , \quad x \leq 0 \\ x^{n+1} & , \quad x > 0 \end{cases}$$

definiert. Zeigen Sie, dass f auf ganz $\mathbb{R}$ n -mal stetig differenzierbar ist und berechnen sie die k -te Ableitung $f^{(k)}$ für alle $k \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Aufgabe 3:

Sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Die Funktionen $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ seien in $[a, b]$ stetig, in (a, b) differenzierbar und es gelte $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$.

(a) Zeigen Sie, dass $g(a) \neq g(b)$ gilt.

(b) Weisen Sie nach, dass ein $c \in (a, b)$ existiert mit

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Aufgabe 4

Untersuchen Sie die folgenden Funktionen f auf Umkehrbarkeit im angegebenen Intervall D . Falls die Funktion umkehrbar ist, dann berechnen Sie die Ableitung an der Stelle y_0 .

(a) $f(x) = 2x + 3$, $D = \mathbb{R}$, $y_0 = 1$

(b) $f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$, $D = \mathbb{R}$, $y_0 = 1$

(c) $f(x) = (x - 2)^2 + 1$, $D = \mathbb{R}$, $y_0 = 5$

(d) $f(x) = (x - 2)^2 + 1$, $D = [1, \infty)$, $y_0 = 5$

Aufgabe 5 Leiten Sie die Ableitungen der nachfolgend genannten Umkehrfunktionen her.

(a) $\ln : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$ ist die Umkehrfunktion von $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$

(b) $\arcsin : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ist die Umkehrfunktion von $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$

(c) $\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$ ist die Umkehrfunktion von $\cos : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$

Aufgabe 6

Sei $D \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine mindestens zweimal differenzierbare Funktion. Zeigen Sie, dass f genau dann konvex auf D ist, wenn $f''(x) \geq 0$ für alle $x \in D$ gilt.