

Mathematik IT 3 (Analysis)

für die Studiengänge Informatik/Diplom, Informatik/Bachelor, Informations- und Medientechnik/Bachelor
und eBusiness/ Bachelor, 3. Semester im Wintersemester 2010/2011

Aufgaben zur Übungsstunde am 27./28.01.2011

Aufgabe 1:

Bestimmen Sie die Lösung der folgenden Anfangswertaufgaben:

(a) $y' = -\frac{y}{x}, \quad y(2) = 1$

(c) $y' = \frac{3+x^2}{y}, \quad y\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{1}{6}}$

(b) $y' = \frac{x}{y^2}, \quad y(0) = 3$

(d) $(x^2 - 1)y' + 2xy = xy^2, \quad y(0) = 1$

Aufgabe 2 (Das Ebbinghaussche Modell des Vergessens¹)

Ein Student hat sich einen gewissen Wissensstoff eingeprägt (etwa für eine Prüfung). Mit der Zeit wird er einiges davon vergessen. Es sei $p(t)$ der Prozentsatz des Stoffes, den er in $t \geq 0$ Zeiteinheiten nach dessen voller Meisterung noch im Gedächtnis hat; es ist also $p(0) = 100$. Optimistischerweise wird man annehmen dürfen, dass er einen gewissen Prozentsatz b mit $0 < b < 100$ des Stoffes nie vergißt. Ferner wird man den Ansatz wagen, dass zur Zeit t die Vergessensrate $p'(t)$ proportional zu dem Prozentsatz des noch zu vergessenden Stoffes, also zu $p(t) - b$, ist.

- (a) Formulieren Sie das zugehörige Anfangswertproblem und lösen Sie es. Welche Bedeutung hat $p'(t)$?
(b) Neben $p(0) = 100$ sei außerdem der Anfangswert $p(4) = 50$ und die Vergessensrate $b = 10$ bekannt. Bestimmen Sie die Zeit, zu der 80 Prozent des gelernten Stoffes vergessen wurde.

Aufgabe 3 (Modell der Gurtmuffel)

Zur Zeit $t_0 = 0$ wird das Anlegen des Sicherheitsgurtes im Auto zur Pflicht gemacht; die wackeren Bürger kommen jedoch diesem Gesetz nicht sofort nach. Sei $b(t)$ der Bruchteil derjenigen, die das Gesetz zur Zeit $t \geq 0$ befolgen. Man kann annehmen, dass die Anzahl der Gurtbenutzer mit einer Geschwindigkeit wächst, die proportional zur Anzahl der noch vorhandenen Gurtmuffel ist. Formulieren und lösen Sie das entsprechende Anfangswertproblem.

Aufgabe 4

Lösen Sie die Differentialgleichung $y' = \frac{y^2 - x^2}{2xy}$, indem Sie diese in die Form $f\left(\frac{y}{x}\right)$ bringen, und skizzieren Sie einige Lösungskurven. (Hinweis: Differentialgleichungen vom Typ $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ werden Ähnlichkeitsdifferentialgleichungen genannt. Mit dem Ansatz $z(x) := \frac{y(x)}{x}$ erhält man $y = zx$ und $y' = z'x + z$. Die Substitution von y und y' ermöglicht dann die Trennung der Variablen.)

Aufgabe 5

Lösen Sie die folgenden Anfangswertaufgaben:

(a) $y' = -y \sin(x) + \sin^3(x), \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 5$

(b) $y' + ay = \sin(x) + e^{-5x}, \quad y(0) = 0$

¹benannt nach dem Psychologen Hermann Ebbinghaus (1850 - 1909)