

Mathematik IT 3 (Analysis)

für die Studiengänge Informatik/Diplom, Informatik/Bachelor, Informations- und Medientechnik/Bachelor
und eBusiness/ Bachelor, 3. Semester im Wintersemester 2010/2011

Umkehrfunktionen

Definition:

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt umkehrbar, wenn f bijektiv ist, d.h. zu jedem $y \in f(D)$ gibt es ein $x \in D$ mit $y = f(x)$ [Surjektivität von f] und für alle $x_1, x_2 \in D$ gilt $x_1 \neq x_2$ genau dann, wenn $f(x_1) \neq f(x_2)$ gilt [Injektivität von f]. Die Umkehrfunktion $f^{-1} : f(D) \rightarrow D$ ordnet jedem $y \in f(D)$ genau das $x \in D$ zu, für welches $y = f(x)$ gilt. Dabei ist $f(D) := \{f(x) \mid x \in D\} \subseteq \mathbb{R}$ der Wertebereich von f .

Bemerkungen:

- Eine Funktion, deren Umkehrfunktion existiert, wird auch als invertierbar bezeichnet.
- Vorsicht! Die Bezeichnung $f^{-1}(x)$ ist nicht mit der Funktion $\frac{1}{f(x)}$ zu verwechseln!
- Anschaulich erkennt man die Umkehrbarkeit einer Funktion f daran, dass jede Parallele zur x -Achse den Graph von f höchstens einmal schneidet.
- Ist f bijektiv, dann bedeutet dies: Verschiedenen Elementen des Definitionsbereichs sind stets auch verschiedene Elemente des Wertebereichs $f(D)$ zugeordnet. Die Funktion f ist dann umkehrbar.
- Ist f nicht bijektiv, dann bedeutet dies: Ist zwei oder mehr Elementen des Definitionsbereichs D einer Funktion f ein und dasselbe Element des Wertebereichs $f(D)$ zugeordnet. Dann ist die Funktion nicht umkehrbar.
- Die Umkehrfunktion f^{-1} bzw. ihren Graphen erhält man anschaulich dadurch, indem man f an der Geraden $g(x) = x$ spiegelt.

Kriterium für Umkehrbarkeit:

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ sei auf D differenzierbar. Ist f auf D streng monoton fallend (d.h. es gilt $f'(x) < 0$ für alle $x \in D$) oder streng monoton steigend (d.h. es gilt $f'(x) > 0$ für alle $x \in D$), dann existiert die Umkehrfunktion $f^{-1} : f(D) \rightarrow D$. Die Funktion f^{-1} ist ebenfalls streng monoton.

Berechnung von Umkehrfunktionen:

Nur in speziellen Fällen ist es möglich, die Umkehrfunktion $f^{-1}(y)$ zu berechnen, in dem die Gleichung $y = f(x)$ nach x aufgelöst wird. Beispiele:

- $y = f(x) = 2x + 3 \Leftrightarrow x = f^{-1}(y) = \frac{1}{2}y - \frac{3}{2}$ für $x, y \in \mathbb{R}$
- $y = f(x) = e^x \Leftrightarrow x = f^{-1}(y) = \ln(y)$ für $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}_{>0}$
- $y = f(x) = \sin(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y) = \arcsin(y)$ für $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), y \in (-1, 1)$

In vielen Fällen lässt sich $x = f^{-1}(y)$ nur für Einzelwerte berechnen. Beispiel: $y = f(x) = x \cdot e^x$ ist umkehrbar für $x > -1$, ihre Umkehrfunktion lässt sich nicht berechnen, da die Gleichung $y = f(x)$ nicht nach x aufgelöst werden kann.

Ableitung der Umkehrfunktion:

Sei $D \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige, streng monotone Funktion und $f^{-1} : f(D) \rightarrow D$ die Umkehrfunktion von f . Ist f im Punkt $x \in D$ differenzierbar und $f'(x) \neq 0$, so ist f^{-1} im Punkt $y := f(x)$ differenzierbar und es gilt

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

Literatur:

Die Beweise der hier angegebenen Aussagen sind zum Beispiel in folgendem Lehrbuch zu finden:

- Forster, O.: *Analysis 1 - Differential- und Integralrechnung einer Veränderlichen*, Vieweg, Wiesbaden 2001