

Mathematik IT 3 (Analysis)

für die Studiengänge Informatik/Diplom, Informatik/Bachelor, Informations- und Medientechnik/Bachelor
und eBusiness/ Bachelor, 3. Semester im Wintersemester 2011/2012

Übungsblatt 0 - ohne Abgabe, Besprechung in der ersten Übung

Aufgabe 1

Beweisen Sie die folgenden Aussagen durch vollständige Induktion:

- (a) $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ für $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.
- (b) $\sum_{k=1}^n x^{k-1} = \frac{x^n - 1}{x - 1}$ für $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
- (c) $\sum_{k=1}^n 2k - 1 = n^2$ für $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.
- (d) $n^2 > 2n + 1$ für $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\}$.
- (e) $a_n := 3^n - 3$ für $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ist durch 6 teilbar.
- (f) $(p+1)^n > n \cdot p + 1$ für $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ und $p \in (-1, \infty) \setminus \{0\}$.

Aufgabe 2

Untersuchen Sie die folgenden Abbildungen auf Linearität:

- (a) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definiert durch $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x + 2y \\ x \end{pmatrix}$
- (b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$
- (c) $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definiert durch $f(z) = \bar{z}$
- (d) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definiert durch $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 x_2 \end{pmatrix}$

Aufgabe 3

Seien $e_1 := (1, 0, 0)^T$, $e_2 := (0, 1, 0)^T$ und $e_3 := (0, 0, 1)^T$ die Einheitsvektoren des $\mathbb{R}^3$ und $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definiert durch $f(x) := Ax$ mit $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ sei eine lineare Abbildung.

- (a) Bestimmen Sie die Matrix A der linearen Abbildung f , die die Einheitsvektoren e_1, e_2, e_3 wie folgt abbildet.

$$f(e_1) = e_1 + e_2 \quad , \quad f(e_2) = -2e_1 - 3e_2 + e_3 + (1, 1, 1)^T \times e_2 \quad \text{und} \quad f(e_3) = f(e_1) \times e_3.$$

(Hinweis: Dabei ist $\times: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ das Vektorprodukt.)

- (b) Berechnen Sie die Dimension des Bildraumes $\text{Im}(f)$.
- (c) Bestimmen Sie den Unterraum $\text{Ker}(f) := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid Ax = 0\}$.

Aufgabe 4

Gegeben seien im $\mathbb{R}^5$ die Vektoren $v_1 = (4, 1, 1, 0, -2)$, $v_2 = (0, 1, 4, -1, 2)$, $v_3 = (4, 3, 9, -2, 2)$, $v_4 = (1, 1, 1, 1, 1)$ und $v_5 = (0, -2, -8, 2, -4)$. Bestimmen Sie eine Basis von $V := \text{span}(v_1, \dots, v_5)$.

Aufgabe 5

Untersuchen Sie die folgenden Abbildungen auf Injektivität und Surjektivität:

- (a) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f(x, y) = x + y$
- (b) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$.

Aufgabe 6

(a) Geben Sie die Negation der folgenden Aussagen an:

- (i) $x \geq -2$
- (ii) $x \leq 0 \quad \vee \quad x > 10$
- (iii) $f \in \{\text{rot, gelb}\} \quad \wedge \quad f \notin \{\text{grün, blau}\}$
- (iv) Paul sagt: „Max lügt“

(b) Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

- (i) $\neg(A \vee B) \quad \Leftrightarrow \quad \neg A \wedge \neg B$
- (ii) $A \Rightarrow B \quad \Leftrightarrow \quad \neg A \vee B$
- (iii) $A \Rightarrow B \quad \Leftrightarrow \quad \neg B \Rightarrow \neg A$

Aufgabe 7 (Regel von DE MORGAN)

Sei X eine Menge und A, B seien Teilmengen von X . Beweisen Sie, dass $X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$ gilt.