Brandenburgische
Technische Universität
Cottbus

Lehrstuhl Mathematik, insbesondere
Numerische und Angewandte Mathematik
Prof. Dr. L. Cromme

Mathematik IT 3 (Analysis)

für die Studiengänge Informatik/Diplom, Informatik/Bachelor, Informations- und Medientechnik/Bachelor und eBusiness/ Bachelor, 3. Semester im Wintersemester 2011/2012

Übungsblatt 2 - Abgabe bis Dienstag, 01.11.2011, 12:00 Uhr im Postfach 32 im HG

Aufgabe 1 (6 Punkte)
A und B seien beschränkte und nichtleere Teilmengen der reellen Zahlen mit $A \subset B$. Zeigen Sie, dass $\inf(B) \leq \inf(A) \leq \sup(A) \leq \sup(B)$ gilt, und geben Sie zwei Beispiele für Mengen A und B an, bei denen in den behaupteten Ungleichungen an genau einer Stelle die Gleichheit gilt.

Aufgabe 2 (7 Punkte)
Sei $a \in \mathbb{R}$ beliebig gewählt. Betrachten Sie die auf ganz $\mathbb{R}$ definierten Rundungsfunktionen

- $\lfloor x \rfloor := \max\{z \in \mathbb{Z} \mid z \leq x\}$ (Gauß-Klammer bzw. floor-Funktion) und
- $\lceil x \rceil := \min\{z \in \mathbb{Z} \mid z \geq x\}$ (ceil-Funktion).

Welche der folgenden Beziehungen sind richtig, welche sind falsch? Begründen Sie Ihre Antwort durch Beweis oder ein Gegenbeispiel.

(a) $\lfloor x \rfloor \leq x \leq \lceil x \rceil$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(b) $\lceil x \rceil = \lfloor x \rfloor + 1$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$

(c) $x < \lfloor a \rfloor + 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \leq a$.

(d) $x \leq \lfloor a \rfloor$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x < a$.

(e) Aus $x \geq \lceil a \rceil$ folgt $x \geq a$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(f) $\lfloor |x| \rfloor = \left| \lfloor x \rfloor \right|$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(g) $\lfloor x \rfloor = -\lceil -x \rceil$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 3 (8 Punkte)

(a) Skizzieren Sie die Menge $M := \{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Im}((1-i)z) = 0\}$ in der komplexen Zahlenebene.

(b) Stellen Sie die komplexen Zahlen $v = \frac{5+5i}{1+2i} - \frac{5-5i}{1-2i}$ und $w = \frac{8-2i}{4-i}$ in der Form $a + bi$ dar.

(c) Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen $z \in \mathbb{C}$, für die die Gleichung $\frac{1}{2}z^6 = -3z^5 - \frac{13}{|\sqrt{3}+i|}z^4$ erfüllt ist und stellen Sie diese in der Form $z = a+bi$ dar. Hat die Lösungsmenge ein Infimum, Supremum, Minimum oder Maximum? Begründen Sie Ihre Antwort.

(Aufgaben 4 und 5 auf Seite 2)

Aufgabe 4 (6 Punkte)
Untersuchen Sie die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit den angegebenen Gliedern auf Konvergenz bzw. Divergenz und bestimmen Sie im Fall der Konvergenz den Grenzwert:

(a) $a_n := \frac{3n^5-3n^3+1}{4n^5+4n^2+n}$ für $n \geq 1$

(b) $a_n := n + 1 - \frac{(n-1)^2}{n+1}$ für $n \geq 0$

(c) $a_n := \sqrt{n+6\sqrt{n}} - \sqrt{n+4\sqrt{n}}$ für $n \geq 1$

(d) $a_n := \sqrt{3n^2-1} - \sqrt{4n^2-\frac{1}{n}}$ für $n \geq 1$

Aufgabe 5 (4 Punkte)
Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei Folgen mit positiven Gliedern. Ferner gelte $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$. Beweisen Sie, dass unter den genannten Voraussetzungen gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n^2 + b_n^2}{a_n + b_n} \;=\; 0$$