

Mathematik IT 3 (Analysis)

für die Studiengänge Informatik/Diplom, Informatik/Bachelor, Informations- und Medientechnik/Bachelor
und eBusiness/Bachelor, 3. Semester im Wintersemester 2011/2012

Übungsblatt 3 - Abgabe bis Dienstag, 08.11.2011, 12:00 Uhr im Postfach 32 im HG

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Geben Sie jeweils ein Beispiel von Folgen reeller Zahlen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ an, so dass die folgenden Fälle eintreten:

- (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \infty$
- (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = -\infty$
- (c) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = c$, wobei $c \in \mathbb{R}$ beliebig ist
- (d) Die Folge $(a_n \cdot b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist beschränkt, aber nicht konvergent.

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Beweisen Sie folgende Behauptungen mit Hilfe der $\varepsilon - n_0$ -Definition der Konvergenz:

- (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ für $a_n := \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$
- (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ für $a_n := \sqrt[n]{n}$

(Hinweis zu (b): Schätzen Sie zunächst $(1 + \varepsilon)^n$ für $n \geq 2$ geeignet nach unten ab.)

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Untersuchen Sie die rekursiv definierte Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_0 := 1$ und $a_{n+1} := \frac{a_n}{a_n + 2}$ für $n \in \mathbb{N}$ auf Konvergenz. (Der Grenzwert muss nicht berechnet werden.)

Aufgabe 4 (7 Punkte)

- (a) Beweisen Sie, dass die durch $x_{n+1} := \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right)$ für $n \in \mathbb{N}$, $x_1 > 0$, definierte rekursive Folge für $a > 0$ gegen den Grenzwert $\sqrt{a}$ konvergiert. (Hinweis: Weisen Sie zuerst nach, dass $x_{n+1} \geq \sqrt{a}$ gilt, und dann, dass die Folge für $n \geq 2$ streng monoton fällt.)
- (b) Verwenden Sie die Folge aus (a), um $\sqrt{5}$ auf mindestens fünf Nachkommastellen genau zu berechnen.

Aufgabe 5 (8 Punkte)

Nach Definition aus der Vorlesung heißt a Häufungspunkt einer Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, wenn es eine Teilfolge von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gibt, die gegen a konvergiert. In der Literatur wird auch der Begriff des Häufungswertes verwendet. Ermitteln Sie die Häufungspunkte der Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

- (a) $a_n := \frac{3n^2}{5n^2 + 2n} + (-1)^n \cdot \frac{3n^2 + 5n}{2n^2 + 3} \cdot \frac{7n^3 + n}{10n^3 + 8n^2 + (-1)^n}$
- (b) $a_n := (-1)^n \left(n - 3 \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor \right) \cdot \frac{5n^7 - 1}{1 - 8n^7}$ für $n \geq 1$