

Mathematik IT 3 (Analysis)

für die Studiengänge Informatik/Diplom, Informatik/Bachelor, Informations- und Medientechnik/Bachelor
und eBusiness/Bachelor, 3. Semester im Wintersemester 2011/2012

Übungsblatt 4 - Abgabe bis Dienstag, 15.11.2011, 12:00 Uhr im Postfach 32 im HG

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Untersuchen Sie, für welche reellen Zahlen x die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n := \left(\frac{x}{5}\right)^n$ konvergiert bzw. divergiert.

Aufgabe 2 (9 Punkte)

Untersuchen Sie die Folgen mit den angegebenen Gliedern auf Konvergenz bzw. Divergenz und bestimmen Sie ggf. deren Häufungspunkte bzw. Grenzwerte.

- (a) $a_n := \frac{(n^2-3)^2}{2n^4+7n-12} \cdot \left(\frac{4-2n^2}{7n+5n^2} - \frac{3n^3+2n^2}{5n^3-1} \right)$
- (b) $a_n := \left(n + 3 \left\lfloor -\frac{n}{3} \right\rfloor \right) \cdot \frac{3n}{5n+8}$
- (c) $a_n := \sin\left(\frac{\pi}{4}n\right)$
- (d) $a_n := \frac{8^{n-5}+5}{5^{n-2}}$

Aufgabe 3 (10 Punkte)

- (a) Beweisen Sie, dass $a \in \mathbb{R}$ genau dann Häufungspunkt einer Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist, wenn gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall n_0 \in \mathbb{N} \quad \exists n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \quad : \quad |a_n - a| < \varepsilon.$$

Vergleichen Sie diese Aussage mit der Definition des Grenzwertes einer Folge und diskutieren Sie den Unterschied.

- (b) Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine reelle Zahlenfolge mit $|a_n - a_{n+1}| \leq \frac{1}{2^n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Weisen Sie nach, dass die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Berechnen Sie den Grenzwert der folgenden Reihen:

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+2}}{5^n}$ (b) $\sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{5}{7}\right)^{n-1}$

Aufgabe 5 (6 Punkte)

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{n!}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5n-3}{7n+8}\right)^n$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n+2(-1)^n}$