

Mathematik IT 3 (Analysis)

für die Studiengänge Informatik/Diplom, Informatik/Bachelor, Informations- und Medientechnik/Bachelor
und eBusiness/Bachelor, 3. Semester im Wintersemester 2011/2012

Übungsblatt 6 - Abgabe bis Dienstag, 29.11.2011, 12:00 Uhr im Postfach 32 im HG

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Untersuchen Sie, ob die folgenden Reihen konvergieren:

(a) $\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{k} - \sqrt{k-1}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} n^4 \cdot e^{-n^2}$

(c) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2n + n^3}{3 - 4n^3} \right)^n$

Sind die Reihen in (b) und (c) absolut konvergent?

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Das Cauchy-Produkt $\sum_{n=0}^{\infty} c_n := (\sum_{n=0}^{\infty} a_n) (\sum_{n=0}^{\infty} b_n)$ zweier unendlicher Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ wird definiert durch mit $c_n := \sum_{k=0}^n a_{n-k} b_k$. Untersuchen Sie, ob das folgende Cauchy-Produkt

$$\left(3 + \sum_{n=1}^{\infty} 3^n \right) \left(-2 + \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \right)$$

konvergiert und geben Sie im Fall der Konvergenz den Grenzwert an.

(Hinweis: Beachten Sie bei Ihren Rechnungen die Folgenglieder a_0 und b_0 !)

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Weisen Sie mit Hilfe des Folgenkriteriums der Stetigkeit nach, dass die folgenden Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ im angegebenen Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ stetig sind:

(a) $f(x) = \sum_{k=0}^n x^k$ für $n \in \mathbb{N}$ ist stetig in $x_0 := a \in \mathbb{R}$

(b) $f(x) = \frac{x}{e^x}$ ist stetig in $x_0 := a \in \mathbb{R}$

(Hinweis: Auch wenn es noch so einfach erscheint: Zwingen Sie sich hier tatsächlich, dass Folgenkriterium der Stetigkeit zu verwenden. Dabei darf bekanntes Wissen verwendet werden, d.h. insbesondere dass die Monome x^k für $k \in \mathbb{R}$ und die Exponentialfunktion e^x stetig in $\mathbb{R}$ sind, dies muss nicht extra bewiesen werden. Bei dieser Aufgabe soll es hauptsächlich darum gehen, dass Sie die zugehörigen Schreibweisen und Formulierungen des Stetigkeits- bzw. Grenzwertbegriffs verinnerlichen.)

(Aufgaben 4 und 5 siehe Seite 2)

Aufgabe 4 (6 Punkte)

Weisen Sie mit Hilfe der Definition des Funktionsgrenzwertes nach, dass der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ für die angegebenen Funktionen f in den jeweiligen Punkten x_0 **nicht** existiert:

(a) $f(x) := \frac{1}{x-1}$ für $x_0 := 1$

(b) $f(x) := 2^{\frac{1}{x}}$ für $x_0 := 0$

(c) $f(x) := x - \lfloor x \rfloor$ für alle $x_0 \in \mathbb{Z}$

Aufgabe 5 (8 Punkte)

Bestimmen Sie die Definitionsbereiche D , auf denen die folgenden Funktionen $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ sinnvoll definiert werden können. Prüfen Sie die Funktionen auf Stetigkeit und auf die Möglichkeit der stetigen Ergänzung.

(a) $f(x) := \frac{x}{|x|}$

(b) $f(x) := \frac{x-3}{x^2-2}$

(c) $f(x) := \begin{cases} \sqrt{x} & , \quad x \geq 1 \\ \exp\left(\frac{x-1}{2}\right) & , \quad x < 1 \end{cases}$

(d) $f(x) := \frac{8x^2 + 23}{\sqrt{7x^2 + 11} - \sqrt{6x^2 + 9}}$