Brandenburgische
Technische Universität
Cottbus

Lehrstuhl Mathematik, insbesondere
Numerische und Angewandte Mathematik
Prof. Dr. L. Cromme

Mathematik IT 3 (Analysis)

für die Studiengänge Informatik/Diplom, Informatik/Bachelor, Informations- und Medientechnik/Bachelor und eBusiness/Bachelor, 3. Semester im Wintersemester 2011/2012

Übungsblatt 7 - Abgabe bis Dienstag, 06.12.2011, 12:00 Uhr im Postfach 32 im HG

Aufgabe 1 (8 Punkte)

Untersuchen Sie, ob die folgenden Funktionen auf ganz $\mathbb{R}$ stetig sind. Falls dabei eine Funktion in einem oder mehreren Punkten $x_0 \in \mathbb{R}$ nicht definiert sein sollte, dann überprüfen Sie, ob f in x_0 stetig ergänzbar ist.

(a) $f(x) = \frac{x^2+x-2}{x-1}$

(b) $f(x) = \exp\left(\frac{1}{x-1}\right) \cdot \frac{1}{x}$

(c) $f(x) = \big(x - \lfloor x \rfloor\big) \cdot \big(x + \lfloor x \rfloor\big)$

Aufgabe 2 (7 Punkte)

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ durch $f(x) := |x| + 3x^2 - 7$. Untersuchen Sie f auf Stetigkeit und berechnen Sie die Funktionswerte $f(0)$ und $f(3)$. Gibt es ein $x \in \mathbb{Z}$ mit $f(x) = -3$ oder $f(x) = 5$? Stellen Sie einen Zusammenhang mit dem Zwischenwertsatz her.

Aufgabe 3 (6 Punkte)

In der Übung vom 01./02.12.2011 wurde gezeigt, dass eine stetige Funktion $f : [a, b] \to [a, b]$ mit $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ einen Fixpunkt hat, d.h. es gibt ein $x \in [a, b]$ mit $f(x) = x$ (Fixpunktsatz). Weisen Sie nach, dass die auf dem Intervall $[a, b] = [-2, 2]$ definierte Funktion $f(x) := \frac{x+2}{2x+5}$ alle Voraussetzungen des Fixpunktsatzes erfüllt und berechnen Sie alle Fixpunkte von f.

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Gegeben Sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $f(x) := x^5 - 17$. Zeigen Sie, dass f im Intervall $[1, 2]$ eine Nullstelle hat. Versuchen Sie, diese Nullstelle genauer zu lokalisieren, indem Sie wiederholt das Intervall halbieren. Formulieren Sie einen Algorithmus, der diese Vorgehensweise beschreibt. Wieviele Schritte müssen durchgeführt werden, damit die gesuchte Nullstelle mit einer Genauigkeit von ≤ 0.001 angegeben werden kann? (Hinweis: Die Nullstelle(n) müssen nicht ausgerechnet werden.)

Aufgabe 5 (6 Punkte)

Beweisen Sie mit Hilfe des $\varepsilon - \delta$-Kriteriums der Stetigkeit die folgenden Aussagen:

(a) Die Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ ist stetig für alle $x \in [0, \infty)$.

(b) Seien $f : [a, b] \to \infty$ und $g : [a, b] \to \infty$ stetige Funktionen und $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ sei definiert durch $h(x) := \max\{f(x), g(x)\}$ für alle $x \in [a, b]$. Die Funktion h ist auf $[a, b]$ ebenfalls stetig.