

Mathematik IT 3 (Analysis)

für die Studiengänge Informatik/Diplom, Informatik/Bachelor, Informations- und Medientechnik/Bachelor
und eBusiness/Bachelor, 3. Semester im Wintersemester 2011/2012

Übungsblatt 9 - Abgabe bis Dienstag, 03.01.2012, 12:00 Uhr im Postfach 32 im HG

Aufgabe 1 (14 Punkte)

Gegeben sei die Funktion $f_a(x) := (x + \frac{1}{a}) \cdot e^{-ax}$ für beliebiges $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

- (a) Skizzieren Sie die Funktionen f_{-2}, f_{-1}, f_1 und f_1 im Intervall $[-1, 1]$.
- (b) Führen Sie für f_a eine Kurvendiskussion mit folgendem Inhalt durch: Nullstellen, Koordinaten der lokalen Extrempunkte, Art der lokalen Extrema, Monotonieverhalten und Koordinaten der Wendepunkte.
- (c) Weisen Sie nach, dass alle Wendepunkte der Kurvenschar f_a auf einer Geraden $g(x)$ liegen.

Aufgabe 2 (6 Punkte)

- (a) Sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Weisen Sie nach, dass die n -te Ableitung des Polynoms $p(x) = (x^2 - 1)^n$ genau n verschiedene reelle Nullstellen besitzt, die alle im Intervall $(-1, 1)$ liegen. (Hinweis: Eine k -fache Nullstelle eines Polynoms $p(x)$ ist auch Nullstelle der ersten $k - 1$ Ableitungen $p'(x), p''(x), \dots, p^{(k-1)}(x)$.)
- (b) Stellen Sie eine Formel für die n -te Ableitung der Funktion $f(x) := \frac{1}{1+2x}$ auf und beweisen Sie diese durch vollständige Induktion.

Aufgabe 3 (7 Punkte)

Untersuchen Sie die folgenden Funktionen f auf Umkehrbarkeit im angegebenen Intervall D . Falls die Funktion umkehrbar ist, dann berechnen Sie die Ableitung der Umkehrfunktion an der Stelle y_0 .

- (a) $f(x) = e^{3x^2}$, $D = \mathbb{R}$, $y_0 = e^3$
- (b) $f(x) = (x - 2)^2 + 1$, $D = \mathbb{R}$, $y_0 = 5$
- (c) $f(x) = (x - 2)^2 + 1$, $D = [2, \infty)$, $y_0 = 5$

Aufgabe 4 (6 Punkte)

Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung besagt: Ist $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige und im offenen Intervall (a, b) differenzierbare Funktion: Dann gibt es ein $x_0 \in (a, b)$ mit $f(b) - f(a) = f'(x_0)(b - a)$. Überprüfen Sie den Mittelwertsatz, indem Sie für die folgenden Funktionen alle x_0 aus den angegebenen Intervallen $[a, b]$ bestimmen, für die $f(b) - f(a) = f'(x_0) \cdot (b - a)$ gilt:

- (a) $f(x) = x^3 - 2x$ im Intervall $[0, 2]$
- (b) $f(x) = |x - 2|$ im Intervall $[-1, 4]$
- (c) $f(x) = \frac{1}{x}$ im Intervall $[1, 3]$

(Aufgaben 5 und 6 siehe Seite 2)

Aufgabe 5 (9 Punkte)

(a) Gegeben sei die reellwertige Funktion $f : (-\pi, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) := \begin{cases} \frac{1 - \cos(x)}{\sin(x)} & , \quad x < 0 \\ \frac{\cos(x) - 1}{x} & , \quad x > 0 \\ c & , \quad x = 0 \end{cases} ,$$

wobei $c \in \mathbb{R}$. Kann man die Konstante c in der Funktion g so wählen, dass g in $x = 0$ stetig ist?

(b) Berechnen Sie den Grenzwert $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos\left(\frac{x}{2}\right)}{1 - \cos(x)}$ nach der Regel von l'Hospital.

(c) Berechnen Sie den Grenzwert $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x) + 1}{x}$ nach der Regel von l'Hospital.

Aufgabe 6 (7 Punkte)

In einem Industriegebiet soll ein Wasserturm neu gebaut werden. Der Wasserbehälter des Turms soll aus einem Kegel mit nach unten zeigender Spitze und einem Zylinder bestehen, der sich nahtlos an den Kreis des Kegels anschließt (d.h. die Kegelgrundfläche und der Zylinder sollen den gleichen Radius haben). Aus Kostengründen ist die Höhe des Zylinders auf 2 Meter festgelegt. Außerdem muss die Seitenlänge des Kegels aus technischen Gründen gleich der dreifachen Zylinderhöhe sein. Wie sind der Radius des Zylinders und die Höhe des Kegels zu wählen, damit der Wasserbehälter eine maximale Kapazität hat?

Zusatzaufgabe (ohne Bewertung)

Denken Sie sich eine zum Inhalt der Vorlesung passende weihnachtliche Aufgabe aus, lösen Sie diese und präsentieren Sie uns Ihre Arbeitsergebnisse nach den Weihnachtsferien. Die Lösung der Aufgabe sollte aber nach Möglichkeit ohne das in der Vorlesung noch nicht behandelte Plätzchenteigrezept auskommen.



Frohe Weihnachten und einen erfolgreichen Start ins Jahr 2012
wünschen die Mitarbeiter des Lehrstuhls für Numerische und Angewandte Mathematik.