

Mathematik IT 3 (Analysis)

für die Studiengänge Informatik/Diplom, Informatik/Bachelor, Informations- und Medientechnik/Bachelor
und eBusiness/Bachelor, 3. Semester im Wintersemester 2011/2012

Übungsblatt 10 - Abgabe bis Dienstag, 10.01.2012, 12:00 Uhr im Postfach 32 im HG

Aufgabe 1 (10 Punkte)

- (a) Entwickeln Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = e^x \cdot x$ um den Entwicklungspunkt $x_0 = 1$ in eine Taylorreihe. Welchen Konvergenzradius hat die Taylorreihe von f ?
- (b) Entwickeln Sie die Funktion $f(x) = -\ln(1 - \frac{x}{2})$ um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ in eine Taylorreihe. Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Taylorreihe von f ?

(Hinweis: Stellen Sie in beiden Teilaufgaben zunächst eine Vermutung für die n -te Ableitung ($n \in \mathbb{N}$) von f auf und beweisen Sie diese mit vollständiger Induktion!)

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Berechnen Sie das Taylorpolynom 3. Grades der Funktion $f(x) = \sin^2(x)$ um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$. Weisen Sie außerdem nach, dass für das Restglied $R(x)$ die Abschätzung $|R(x)| \leq \frac{1}{48}$ für alle $x \in [0, \frac{1}{2}]$ gilt.

Aufgabe 3 (8 Punkte)

Zu einer beschränkten Funktion $f : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$, $a > 0$ seien $U(f)$ und $V(f)$ wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} U(f) &:= \{g \mid g \text{ einfache Treppenfunktion zu einer äquidistanten Zerlegung } \Delta \text{ von } [0, a] \\ &\quad \text{mit } g(x) \leq f(x) \forall x \in [0, a]\} \\ V(f) &:= \{g \mid g \text{ einfache Treppenfunktion zu einer äquidistanten Zerlegung } \Delta \text{ von } [0, a] \\ &\quad \text{mit } g(x) \geq f(x) \forall x \in [0, a]\} \end{aligned}$$

Außerdem seien $u_f := \sup \{ \int_0^a g(x) dx \mid g \in U(f) \}$ und $v_f := \inf \{ \int_0^a g(x) dx \mid g \in V(f) \}$ definiert.

- (a) Betrachten Sie die äquidistante Zerlegung $\Delta_4 := \{[0, 0.75]; [0.75, 1.5]; [1.5, 2.25]; [2.25, 3]\}$ des Intervalls $[0, 3]$. Stellen Sie die Funktion $f(x) = \frac{1}{3}x$ im Intervall $[0, 3]$ sowie je eine Funktion $g \in U(f)$ und $h \in V(f)$ zur Zerlegung Δ_4 des Intervalls $[0, a] = [0, 3]$ in einer gemeinsamen Skizze grafisch dar, wobei für jedes Teilintervall $[x_j, x_{j+1})$ der Zerlegung Δ_4 gelten soll: $g(x_j) = f(x_j)$ bzw. $h(x_{j+1}) = f(x_{j+1})$ für $j = 0, 1, \dots, 3$. Zeichnen Sie in die Grafik außerdem auch die Flächen $\int_0^3 g(x) dx$ und $\int_0^3 h(x) dx$ ein. Verfahren Sie analog für eine weitere, aber feinere äquidistante Zerlegung Δ_n für $n \geq 6$.
- (b) Bestimmen Sie u_f und v_f zu $f(x) = \frac{1}{3}x$ für $x \in [0, a]$.
- (c) Ist $f(x) = \frac{1}{3}x$ integrierbar? Falls ja, dann begründen Sie dies unter Rückgriff auf die Definition von Ober- und Unterintegral und berechnen Sie $\int_0^a \frac{1}{3}x dx$.

(Aufgabe 4 siehe Seite 2)

Aufgabe 4 (13 Punkte)

Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale:

(a) $\int x^3 + \frac{5}{2}x\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt[3]{x}} dx$

(b) $\int (x+1) \sin(x) dx$

(c) $\int e^x \cos(x) dx$

(d) $\int (\cos(x) \sin(x) - \sin(2x)) \cdot e^{\sin^2(x) + \cos(2x)} dx$

(e) $\int \frac{x^2 - \sin(x)}{x^3 + 3 \cos(x)} dx$

(f) $\int \frac{2x}{x^4 + 1} dx$