Brandenburgische
Technische Universität
Cottbus

Lehrstuhl Mathematik, insbesondere
Numerische und Angewandte Mathematik
Prof. Dr. L. Cromme

Mathematik IT 3 (Analysis)

für die Studiengänge Informatik/Diplom, Informatik/Bachelor, Informations- und Medientechnik/Bachelor und eBusiness/Bachelor, 3. Semester im Wintersemester 2011/2012

Übungsblatt 12 - Abgabe bis Dienstag, 24.01.2012, 12:00 Uhr im Postfach 32 im HG

Aufgabe 1 (9 Punkte)

(a) Gegeben sei die Funktion $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ durch $f(x) := -x \cdot \ln(x)$. Berechnen Sie die einzige Extremstelle von f. Diese werde an der Stelle $x_0 \in (0, \infty)$ angenommen. Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die durch f, die x-Achse und die Gerade $x = x_0$ begrenzt wird.

(b) Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $f(x) := e^{2x} - 3e^x + 2$. Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die zwischen den Nullstellen der Funktion f von f und der x-Achse eingeschlossen wird.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Untersuchen Sie, ob die folgenden uneigentlichen Integrale[1] existieren und bestimmen Sie deren Wert:

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$

(b) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^c}\,dx$ für $c > 1$

Aufgabe 3 (7 Punkte)

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) := \frac{x}{1+x}$.

(a) Entwickeln Sie die Funktionen f um den Entwicklungspunkt $x_0 = 2$ in eine Taylorreihe. Welchen Konvergenzradius hat die Taylorreihe von f?

(b) Berechnen Sie das Taylorpolynom 2. Grades zu f um den Entwicklungspunkt $x_0 = 2$ und schätzen Sie das Restglied für $x \in [1, 3]$ ab.

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Berechnen Sie die Koeffizienten a_k und b_k der Fourierreihe $p(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$ für die nachfolgend genannten 2π-periodischen Funktionen f:

(a) $f(x) := \begin{cases} x & , \quad x \in [0, \pi] \\ \pi & , \quad x \in [\pi, 2\pi) \end{cases}$

(b) $f(x) := \big|\sin(x)\big|$ für $x \in [-\pi, \pi)$

(Aufgabe 5 siehe Seite 2)

[1] **Definition**: Sei $f : (a, b] \to \infty$ eine Funktion, die über jedem Intervall $[a + \varepsilon, b]$ für $0 < \varepsilon < b - a$ integrierbar ist. Falls der Grenzwert $\lim\limits_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx$ existiert, dann setzen wir $\int_a^b f(x)\,dx := \lim\limits_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx$. Das Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ heißt uneigentliches Integral. Analog definiert man $\int_a^\infty f(x)\,dx := \lim\limits_{b \to \infty} \int_a^b f(x)\,dx$ für $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$, falls f auf jedem der Intervalle $[a, b]$ für $b > a$ integrierbar ist und der genannte Grenzwert existiert.

Aufgabe 5 (4 Punkte)

Welche der Funktionen

$$y_1(x) = \sin(x) \quad , \quad y_2(x) = \cos(x) \quad , \quad y_3(x) = e^{\sin(x)}$$

$$y_4(x) = 4\left(1 - \exp\left(-\tfrac{x^2}{2}\right)\right) \quad , \quad y_5(x) = -\tfrac{\ln(1-x)}{1+x}$$

löst die folgenden Differentialgleichungen?

(a) $y' = y\cos(x)$

(b) $y' = 4x - yx$

(c) $(y')^2 = 1 - y^2$

(d) $y' = \frac{1}{1-x^2} - \frac{y}{1+x}$