
Mathematik IT 3 (Analysis)

für die Studiengänge Informatik/Diplom, Informatik/Bachelor, Informations- und Medientechnik/Bachelor
und eBusiness/Bachelor, 3. Semester im Wintersemester 2011/2012

Übungsblatt 13 - Abgabe bis Dienstag, 31.01.2012, 12:00 Uhr im Postfach 32 im HG

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Bestimmen Sie die Lösungen der folgenden Differentialgleichungen:

(a) $y' = \frac{x}{y}$

(b) $y' = -\lambda \sqrt[4]{y}$ für beliebiges $\lambda > 0$

Aufgabe 2 (7 Punkte)

Lösen Sie die folgenden Anfangswertaufgaben:

(a) $y' = -\frac{y^2}{x}$ mit $y(2) = \frac{1}{\ln(2)}$

(b) $(1 + x^3)y' - x^2y = 0$ mit $y(1) = 2$

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Lösen Sie die folgenden Anfangswertaufgaben:

(a) $y' - y = e^x$ mit $y(0) = 1000$

(b) $y' = 2x - y$ mit $y(0) = 0$

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Sei $h(t)$ die Höhe einer Pflanze zur Zeit t . Bei vielen Pflanzen ist im Frühstadium ihres Wachstums die zeitliche Änderungsrate von $h(t)$ direkt proportional zu $h(t)$ und umgekehrt proportional zu t^3 . Bestimmen Sie $h(t)$, wobei die Maßeinheiten so gewählt seien, dass $h(1) = 1$ gilt.

Aufgabe 5 (10 Punkte)

Im Laufe der Menschheitsgeschichte hat sich die Verbreitung von Informationen ständig gewandelt: Ausgehend von der mündlichen Verbreitung („Mund-zu-Mund-Propaganda“), über den postalischen Weg, die Entwicklung der Massenmedien (Zeitung, Radio, Fernsehen) und die rasante Verbreitung des Telefons gipfelt die Informationsverbreitung heute auf elektronischen Wege in der Nutzung des Internets. Gewandelt hat sich mit den verschiedenen Verbreitungswegen auch die Geschwindigkeit, mit der eine Information verbreitet wird. In dieser Aufgabe sollen Sie die Verbreitung einer Information mit Hilfe von E-Mails untersuchen. Dabei sei eine sehr große Menge von $n \in \mathbb{N}$ Personen (ausgestattet mit Internetzugang und E-Mail-Account) betrachtet, unter denen eine Information I durch Weiterleiten einer E-Mail verbreitet werde. Wir wollen annehmen, dass jeder Empfänger diese E-Mail auch öffnet und die Information I zu Kenntnis nimmt. Jede auf diese Art informierte Person versende die Information I in einer Zeiteinheit an k Personen, wobei $0 < k < n$ gelte. Zum Zeitpunkt $t \geq 0$ sei $w(t)$ die Anzahl der informierten Personen. Mit $p(t)$ bezeichnen wir den Anteil der noch nicht informierten Personen. Außerdem verbreitet eine informierte Person die Information I in einer Zeiteinheit an $k \cdot p(t)$ noch nicht informierte Personen. (Fortsetzung siehe Seite 2)

- (a) Stellen Sie eine Formel für die Anzahl Δw der per E-Mail informierten Personen in einer kleinen Zeitspanne Δt auf. Leiten Sie dann aus dieser Formel eine Differentialgleichung $w' = f(w, t)$ her, die die Verbreitung der Information I per E-Mail beschreibt.
- (b) Lösen Sie die Differentialgleichung aus (a), wobei davon ausgegangen sei, dass zur Zeit $t = 0$ genau eine Person informiert ist.
- (c) Gegeben sei $n = 10^6$ und jede per E-Mail informierte Person leite die E-Mail an zwei noch nicht informierte Personen weiter. Nach welcher Zeit $t > 0$ ist die Hälfte aller n Personen informiert, nach welcher Zeit 900000?