Brandenburgische
Technische Universität
Cottbus

Lehrstuhl Mathematik, insbesondere
Numerische und Angewandte Mathematik
Prof. Dr. L. Cromme

Mathematik IT 3 (Analysis)

für die Studiengänge Informatik/Diplom, Informatik/Bachelor, Informations- und Medientechnik/Bachelor und eBusiness/Bachelor, 3. Semester im Wintersemester 2011/2012

Übungsblatt 14 - Abgabe bis Donnerstag, 09.02.2012, 12:00 Uhr im Postfach 32 im HG

Die Korrektur Ihrer Lösungen erfolgt nur, wenn Sie noch nicht 50 % der Übungspunkte erreicht haben, die sich aus den Ergebnissen der Übungsblätter 1 bis 13 ergeben.

Aufgabe 1 (17 Punkte)
Gegeben sei die Funktion $f(x) := \begin{cases} \exp(-x-\pi) & , \quad -\pi \le x < 0 \\ \exp(x-\pi) & , \quad 0 \le x < \pi \end{cases}$, die 2π-periodisch auf $\mathbb{R}$ fortgesetzt werde.

(a) Zeigen Sie, dass f für alle $x \in \mathbb{R}$ stetig ist.

(b) Ist f für alle $x \in \mathbb{R}$ differenzierbar?

(c) Weisen Sie nach, dass f eine gerade Funktion ist.

(d) Berechnen Sie die Koeffizienten a_k und b_k der Fourierreihe $p(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$ zu $f(x)$ und geben Sie $p(x)$ an.

(Hinweise: Berücksichtigen Sie bei (a) bis (c) stets die Periodizität der Funktion f! Weisen Sie für Aufgabenteil (d) zunächst nach, dass $\int \exp(x-\pi)\cos(kx)\,dx = \frac{1}{k^2+1}\big(k\sin(kx) + \cos(kx)\big)\exp(x-\pi) + c$, $c \in \mathbb{R}$ gilt.)

Aufgabe 2 (15 Punkte)
Untersuchen Sie die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit den nachfolgend angegebenen Gliedern auf Konvergenz bzw. Divergenz und bestimmen Sie ggf. deren Häufungspunkte.

(a) $a_n := \dfrac{(n-2)(n-3)(n+4)^2}{(2n^2-3)^2}$

(b) $a_n := \dfrac{(3n^3+4)^2}{(n-1)(n-2)(n-3)^2}$ für $n \ge 4$

(c) $a_n := (-1)^n - \dfrac{2^n - 3n}{(-3)^n - 7}$

(d) $a_n := 12n + 144\left(\left\lfloor -\dfrac{n+2}{12}\right\rfloor + 2\right)$

(e) $a_n := 12n + 144\left\lfloor \dfrac{n}{12}\right\rfloor$

(f) $a_n := \left(\sqrt{n^2-4} - \sqrt{n^2-n}\right) \cdot \dfrac{2n^2+1}{3-4n^2}$

Aufgabe 3 (15 Punkte)

(a) Berechnen Sie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 17 \cdot 10^{-n}$ und $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{12^{n-2}}{15^{n-1}}$.

(b) Untersuchen Sie die unendliche Reihe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(|x| - \frac{1}{4}\right)^n$ für beliebiges, fest gewähltes $x \in (-1,1)$ auf Konvergenz und absolute Konvergenz.

(c) Ist die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-99n-3n^2}{4n^2+8n+2}\right)^n\cdot\left(\frac{n^3+1}{5n^3-1}\right)^n$ konvergent?

(d) Zeigen Sie mit Hilfe des Leibnizkriteriums, dass die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt[n]{7}}{n^7+7}$ konvergiert.

(e) Untersuchen Sie die Reihe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^{999}-\left|\cos\left(\frac{n^2-1}{2+n}\pi\right)\right|}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n^2+n+1)}$ auf Konvergenz.

(f) Warum ist die Reihe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{5n^2-3n+100}{4n^2-2n+2000000}$ nicht konvergent?

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Gegeben seien die Mengen $A:=\left\{x\in[0,2\pi]\;\middle|\;\sin(x)\geq\frac{1}{2}\right\}$ und $B:=\left\{x\in[0,2\pi]\cap\mathbb{Q}\;\middle|\;\sin(x)\geq\frac{1}{2}\right\}$. Überprüfen Sie A und B auf die Existenz von Infimum, Supremum, Minimum und Maximum in $\mathbb{R}$. Geben Sie diese im Falle der Existenz an. (*Hinweis: Es gilt* $\sin(0)=0$, $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$, $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$ *und* $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$.)

Aufgabe 5 (6 Punkte)

(a) Bestimmen Sie die Koeffizienten $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ eines kubischen Polynoms $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, so dass $f(1)=2$, $|f''(4)|=1$ und $f'''(3)=-6$ gilt, wobei f in $x=2$ ein lokales Minimum haben soll und in einer Umgebung von $x=4$ streng konkav sein soll.

(b) Bestimmen Sie die Koordinaten und Art der lokalen Extremwerte der Funktion $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ mit $f(x):=\frac{e^x}{x}$.

Aufgabe 6 (19 Punkte)
Gegeben sei die Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ durch $f(x):=\begin{cases}\frac{3x}{1-x^2} & , \quad x<\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2}x\cos\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{9}{4} & , \quad x>\frac{1}{2}\\ c & , \quad x=\frac{1}{2}, c\in\mathbb{R}\end{cases}$.

(a) Wie muss die Konstante $c\in\mathbb{R}$ gewählt werden, damit f in $x=\frac{1}{2}$ stetig ist? Begründen Sie Ihre Wahl. (*Hinweis: Die nachfolgenden Teilaufgaben beziehen sich jeweils auf die hier bestimmte Konstante* $c\in\mathbb{R}$.)

(b) Untersuchen Sie, ob die Funktion in $x=-1$ stetig ist.

(c) Skizzieren Sie die Funktion f im Intervall $[0,5]$.

(d) Weisen Sie nach, dass f in $x=\frac{1}{2}$ nicht differenzierbar ist, in diesem Punkt aber ein lokales Maximum hat.

(e) Berechnen Sie das bestimmte Integral $\displaystyle\int_0^{\frac{2\pi+1}{2}}f(x)\,dx$.

(*Hinweis zu (d): Betrachten Sie* f *im Intervall* $\left(\frac{1}{2}-\varepsilon,\frac{1}{2}+\delta\right)$ *für ein geeignetes* $\varepsilon>0$ *bzw.* $\delta>0$.)

Aufgabe 7 (5 Punkte)
Berechnen Sie die folgenden Funktionsgrenzwerte nach den Regeln von l'Hospital:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{\frac{1}{2}-x}{x^2+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\downarrow 1}(x-1)\cdot\ln(2x-2)$

(Aufgaben 8 bis 11 - siehe Seite 3)

Aufgabe 8 (6 Punkte)

Bestimmen Sie die Lösung der folgenden Anfangswertaufgaben :

(a) $y' = \frac{3+x^2}{y}, \quad y\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{1}{6}}$

(b) $y' = \frac{x}{y^2}, \quad y(0) = 3$

Aufgabe 9 (3 Punkte)

Zur Zeit $t_0 = 0$ wird das Anlegen des Sicherheitsgurtes im Auto zur Pflicht gemacht; die wackeren Bürger kommen jedoch diesem Gesetz nicht sofort nach. Sei $b(t)$ der Bruchteil derjenigen, die das Gesetz zur Zeit $t \geq 0$ befolgen. Man kann annehmen, dass die Anzahl der Gurtbenutzer mit einer Geschwindigkeit wächst, die proportional zur Anzahl der noch vorhandenen Gurtmuffel ist. Formulieren und lösen Sie das entsprechende Anfangswertproblem.

Aufgabe 10 (5 Punkte)

Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch $f(x,y) = \begin{cases} 25 \cdot \frac{xy}{x^2+y^2} & , \text{ für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \text{ für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ definiert.

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion f im Nullpunkt $(x,y) = (0,0)$ nicht stetig ist.

(b) Berechnen Sie den Gradient von f im Punkt $(x,y), = (2,1)$.

Aufgabe 11 (6 Punkte)

Untersuchen Sie die folgende Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) := y^3 - x^2 - 3y$ auf die Existenz von lokalen Extremstellen. Entscheiden Sie im Fall der Existenz, ob es sich ein lokales Minimum, ein lokales Maximum oder einen Sattelpunkt handelt.