
Mathematik IT 3 (Analysis)

für die Studiengänge Informatik/Diplom, Informatik/Bachelor, Informations- und Medientechnik/Bachelor
und eBusiness/Bachelor, 3. Semester im Wintersemester 2011/2012

Aufgaben für die Übungen am 03. und 04.11.2011

Aufgabe 1

Untersuchen Sie die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_0 := \sqrt{2}$ und $a_n := \sqrt{2 + \sqrt{a_{n-1}}}$ für $n \geq 1$ auf Konvergenz.

Aufgabe 2

Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Zahlenfolge, so dass ein $n_0 \in \mathbb{N}$ und ein $\delta \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq \delta < 1$ existieren, so dass

$$|x_{n+2} - x_{n+1}| \leq \delta |x_{n+1} - x_n| \quad \text{für alle } n \geq n_0$$

gilt. Beweisen Sie, dass $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dann eine Cauchy-Folge ist.

Aufgabe 3

Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine rekursiv definierte Folge mit $x_{n+1} := \frac{x_n + 1}{x_n + 2}$ für $n \geq 0$ und $x_0 \geq 0$.

- (a) Bestimmen Sie x_1, x_2 und x_3 für $x_0 = 0$.
- (b) Beweisen Sie, dass $x_i \geq 0$ für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt.
- (c) Zeigen Sie, dass $|x_{n+2} - x_{n+1}| \leq \frac{1}{4} |x_{n+1} - x_n|$ für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllt ist.
- (d) Ist die Folge konvergent? Falls ja, dann berechnen Sie ihren Grenzwert.

Aufgabe 4

Bestimmen Sie die Häufungspunkte der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit den nachfolgend angegebenen Gliedern:

- (a) $a_n := (-1)^n + \frac{1}{n}$
- (b) $a_n := \begin{cases} \frac{1}{n} & , \quad n \text{ gerade} \\ 1 & , \quad n \text{ ungerade} \end{cases}$
- (c) $a_n := (-1)^n \sqrt[n]{3}$
- (d) $a_n := \frac{1 + (-1)^n n^2}{2 + 3n + n^2}$
- (e) $a_n := n$