

Mathematik IT 3 (Analysis)

für die Studiengänge Informatik/Diplom, Informatik/Bachelor, Informations- und Medientechnik/Bachelor
und eBusiness/Bachelor, 3. Semester im Wintersemester 2011/2012

Aufgaben für die Übungen am 01. und 02.12.2011

Aufgabe 1

- (a) Weisen Sie mit Hilfe des Folgenkriteriums aus der Definition der Stetigkeit nach, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) := \begin{cases} \cos\left(\frac{1}{x}\right) & , \quad x \neq 0 \\ 1 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

in $x_0 = 0$ *nicht* stetig ist. Kann man durch eine Änderung des Funktionswertes von f in $x_0 = 0$ eine stetige Funktion f erhalten?

- (b) Gegeben sei die Funktion

$$f(x) := \begin{cases} \sqrt{x^2 + 5} & , \quad x < 2 \\ x^2 - 1 & , \quad x > 2 \\ c & , \quad x = 2, c \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Kann die Konstante $c \in \mathbb{R}$ in der Funktionsdefinition so gewählt werden, damit f in $x = 2$ stetig ist?

- (c) Ist die Funktion

$$f(x) := \begin{cases} \frac{\sqrt{5+x}-\sqrt{5}}{x} & , \quad x \neq 0 \\ \frac{1}{\sqrt{20}} & , \quad x = 0 \end{cases}$$

an der Stelle $x_0 = 0$ stetig?

- (d) Weisen Sie mit Hilfe des $\varepsilon - \delta$ -Kriteriums der Stetigkeit nach, dass die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ 1 & , \quad x \geq 0 \end{cases}$$

in $x_0 = 0$ nicht stetig und für alle $x_0 \neq 0$ stetig ist.

- (e) Zeigen Sie mit Hilfe des $\varepsilon - \delta$ -Kriteriums für den Grenzwert einer Funktion, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) := \begin{cases} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

in $x_0 = 0$ stetig ist.

Aufgabe 2

Sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$ und $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ sei eine stetige Funktion.

- (a) Beweisen Sie mit Hilfe des Zwischenwertsatzes, dass f einen *Fixpunkt* hat, d.h. ein $x \in [a, b]$ mit $f(x) = x$ existiert.
- (b) Geben Sie ein Beispiel für ein offenes Intervall (a, b) und eine stetige Funktion $f : (a, b) \rightarrow (a, b)$ an, so dass f keinen Fixpunkt hat.

Aufgabe 3

Beweisen oder widerlegen Sie die folgende Aussage: Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ sei stetig mit $f(x) \in \mathbb{Z}$ für alle $x \in I$. Dann ist f konstant, d.h. $f(x) = c \in \mathbb{Z}$ für alle $x \in I$.