

Mathematik IT 3 (Analysis)

für die Studiengänge Informatik/Diplom, Informatik/Bachelor, Informations- und Medientechnik/Bachelor
 und eBusiness/Bachelor, 3. Semester im Wintersemester 2011/2012

Aufgaben für die Übungen am 05. und 06.01.2012

Aufgabe 1

- (a) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(x-2)^k}{2k^2 + k + 1}$
- (b) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{k=1}^{\infty} k^k x^k$
- (c) Berechnen Sie das Taylorpolynom 3. Grades der Funktion $f(x) = \frac{\sin(2x)}{e^x}$ zum Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ und schätzen Sie das Restglied für $x \in [0, \frac{1}{10}]$ ab.

Aufgabe 2

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *gerade*, wenn $f(x) = f(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, und sie heißt *ungerade*, wenn $f(x) = -f(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

- (a) Welche der folgenden Funktionen $f_1, \dots, f_9 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sind gerade bzw. ungerade?

$$f_1(x) = x \quad ; \quad f_2(x) = x^2 \quad ; \quad f_3(x) = \begin{cases} x^2 & , \quad x \geq 0 \\ -x^2 & , \quad x < 0 \end{cases} \quad ; \quad f_4(x) = x^2 + x \quad ; \quad f_5(x) = \cos(x),$$

$$f_6(x) = \sin(x) \quad ; \quad f_7(x) = x^2 \cos(x) \quad ; \quad f_8(x) = x \sin(x) \quad ; \quad f_9(x) = \cos(x) \sin(x)$$

- (b) Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine gerade und $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine ungerade Funktion. Welche der folgenden Funktionen sind gerade bzw. ungerade:

$$f + g \quad , \quad f \cdot g \quad , \quad \frac{f}{g} \quad , \quad f^2 \quad , \quad g^2 \quad , \quad f \circ g \quad , \quad g \circ f$$

- (c) Zeigen Sie: Die Ableitung einer geraden (bzw. ungeraden) Funktion ist ungerade (bzw. gerade).
- (d) Zeigen Sie: Es gibt mindestens eine Stammfunktion $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ einer geraden (bzw. ungeraden) Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, die ungerade (bzw. gerade) ist.
- (e) Zeigen Sie: Jede Stammfunktion $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ einer ungeraden Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist gerade.
- (f) Geben Sie ein Beispiel einer geraden Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ an, deren Stammfunktion $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ weder gerade noch ungerade ist.
- (g) Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine gerade, $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine ungerade Funktion und $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Beweisen Sie folgende Behauptungen:

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx \quad \text{und} \quad \int_{-a}^a g(x) dx = 0$$