

Mathematik IT 3 (Analysis)

für die Studiengänge Informatik/Diplom, Informatik/Bachelor, Informations- und Medientechnik/Bachelor und eBusiness/Bachelor, 3. Semester im Wintersemester 2011/2012

Aufgaben für die Übungen am 26. und 27.01.2012

Aufgabe 1

Um die negativen Begleiterscheinungen von Prüfungsangst (wie z.B. Nervosität, Stress, Magenkrämpfe, hektisches Wühlen in Vorlesungsmitschriften) zu reduzieren, die allgemein zu schlechten Ergebnissen führen können, möchten mehrere Studenten in diesem Semester versuchen, die Angst vor der Matheprüfung durch Einnahme mehr oder weniger starker Beruhigungsmittel einzudämmen. Am effektivsten erscheint ihnen dabei die intravenöse Einnahme entsprechender Mittel, was den Vorteil hat, dass die Wirkung sofort einsetzt. Allerdings beginnt auch sofort ein Abbau des Medikaments, wobei die Konzentrationsänderung in einem kleinen Zeitschritt Δt direkt proportional zur vorhandenen Konzentration ist. Der Nachteil dieser Mittel besteht darin, dass einerseits bei zu hoher Anfangsdosierung (über 100 mg) die Hirnleistung stark eingeschränkt wird (was das für das Prüfungsergebnis zur Folge hat, kann man sich leicht überlegen). Andererseits erfolgt der Abbau sehr schnell, so dass bei zu kleiner Dosierung die Wirkung vor dem Ende der Prüfung bereits wieder nachgelassen hat. Dabei wirken die Mittel nur, wenn mindestens 5 mg im Blutkreislauf sind.

- (a) Mit $m(t)$ sei die zum Zeitpunkt $t \geq 0$ vorhandene Wirkstoffmenge im Blut bezeichnet. Stellen Sie eine Formel für die Änderung Δm der Wirkstoffmenge in einer kleinen Zeitspanne Δt auf. Leiten Sie dann aus dieser Formel eine Differentialgleichung $m' = f(m, t)$ her, die den Wirkstoffabbau im Blut beschreibt. Lösen Sie die Differentialgleichung, wobei angenommen werden darf, dass unmittelbar nach der Einnahme die gesamte Dosis bereits im Blutkreislauf verfügbar ist.
- (b) Ein Prüfungskandidat wollte ganz sicher gehen und hat einige Wochen vor dem Prüfungstermin ein Mittel ausprobiert. Nach aufwändigen Laborversuchen konnte die für den Studenten gültige Abbaurate $\lambda = \frac{1}{27}$ bestimmt werden. Kann der Student eine Dosis m_0 so wählen, dass einerseits die zulässige Höchstdosis nicht überschritten wird und andererseits eine Wirkung bis zum Ende der 90 Minuten dauernden Prüfung erwartet werden kann, wobei das Medikament zu Beginn der Prüfung eingenommen werden soll? Was schließen Sie für sich persönlich daraus, falls Sie einmal unter Prüfungsangst leiden sollten?

Aufgabe 2

Bestimmen Sie die Lösung der folgenden Anfangswertaufgaben:

- (a) $y' = xy$ mit $y(\sqrt{2}) = e$
- (b) $y' = x^2 y^2 - 3x^2 y$ mit $y(0) = 1$
- (c) $12x^3 + 3x^3 y^2 = \frac{y'}{\ln(x^4)}$ mit $y(1) = 2\sqrt{3}$
- (d) $y' = 2y + x$ mit $y(0) = 1$

Aufgabe 3

In tropischen Wäldern verfault die abgestorbene Vegetation mit einer Rate von 80 % pro Jahr. Gleichzeitig sammelt sich aber etwa 7 Gramm neuer „Abfall“ pro Quadratzentimeter und Jahr an. Stellen Sie eine Differentialgleichung für die Menge $u(t)$ des Abfalls auf einem Quadratzentimeter auf und weisen Sie nach, dass sich diese Menge im Laufe der Zeit stabilisiert.