

Mathematik IT 3 (Analysis)

für die Studiengänge Informatik, IMT und eBusiness im Wintersemester 2012/2013

Geben Sie Ihren Namen, Matr.-Nr., Übungsgruppe auf Ihrer Lösung an und heften Sie alle Blätter zusammen!

Übungsblatt 7 - Abgabe bis Dienstag, 04.12.2012, 12:00 Uhr im Postfach 32 im HG

Aufgabe 23 (9 Punkte)

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

- (a) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mit $a_n := (-1)^n + \frac{3}{n}$ für $n < 1000$, $a_n := \frac{n^3+1}{n^2+10}$ für $1000 \leq n < 10^6$ bzw. $a_n := 0$ für $n \geq 10^6$.
- (b) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mit $a_n := (-1)^n + \frac{3}{n}$ für $n < 1000$, $a_n := \frac{n^3+1}{n^2+10}$ für $1000 \leq n < 10^6$ bzw. $a_n := \frac{2n+1}{2^{2n+1}}$ für $n \geq 10^6$.
- (c) $\sum_{n=10}^{\infty} \left(\frac{n}{3^n}\right)^n$
- (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \max\left(0, \left(-\frac{2}{9}\right)^n\right)$
- (e) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+2}}{3n-2}$

Aufgabe 24 (6 Punkte)

- (a) Zeigen Sie, dass die Reihe $C(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ absolut konvergiert.
- (b) Man beweise mit Hilfe des Cauchy-Produktes von Reihen die Formel $2C(x)^2 = C(2x) + 1$.

Aufgabe 25 (17 Punkte)

- (a) Zu jeder reellen Zahl x mit $0 < x < 1$ gibt es eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, so dass x in einen b -adischen Bruch $x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k b^{-k}$ entwickelt werden kann. Entwickeln Sie $x = \frac{3}{5}$ in einen b -adischen Bruch für $b = 2, 3$.
- (b) Im Computer ist es unmöglich, reelle Zahlen als unendliche 2-adische Brüche darzustellen. Daher verwendet man die Gleitkomma-Darstellung, bei der alle Zahlen mit der selben relativen Genauigkeit dargestellt werden. Der IEEE-Standard (IEEE = Institute of Electrical and Electronics Engineers) verwendet z.B. 64 Bits $(s, e_{10}, e_9, \dots, e_0, a_1, \dots, a_{52}) \in \{0, 1\}^{64}$ zur Darstellung einer reellen Zahl z . Dabei ist s ein Vorzeichenbit ($s = 1$ für negative, $s = 0$ für positive Zahlen) und $e := \sum_{n=0}^{10} e_n 2^n$ ist ein Exponent mit $0 \leq e \leq 2047$ und es gilt

$$z = (-1)^s 2^{e-1023} \left(1 + \sum_{k=1}^{52} a_k 2^{-k}\right) \quad (*)$$

Die Zahlen $a_1, \dots, a_{52}$ sind dabei so zu bestimmen, dass $1 \leq 1 + \sum_{k=1}^{52} a_k 2^{-k} < 2$ gilt. Bestimmen Sie die 64-Bit-IEEE-Darstellungen der Zahlen $x = -\frac{9}{4}$ und $y = \frac{1}{10}$. Werden die Zahlen x und y exakt dargestellt? Geben Sie für x bzw. y den relativen Fehler an, der durch die Verwendung von $(*)$ entsteht.

(Aufgabenteil (c) - siehe Seite 2)

- (c) Die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sei rekursiv definiert durch $a_0 := \frac{1}{10}, a_1 := \frac{1}{100}$ und $a_{n+1} := \frac{1}{2}(a_n - a_{n-1})$. Berechnen Sie das Folgenglied a_9 durch exakte Rechnung sowie numerisch durch Runden der Folgenglieder a_n auf zwei Nachkommastellen, wobei Sie dann mit diesen Näherungswerten weiterrechnen. Vergleichen Sie die Ergebnisse und interpretieren Sie dies im Hinblick auf die Genauigkeit des numerischen Rechnens allgemein.

(Hinweis zu (b): Folgern Sie für $x = -\frac{9}{4}$ den relativen Fehler aus Ihren Rechenschritten für die 64-Bit-Darstellung (*). Zur Bestimmung des relativen Fehlers für $y = \frac{1}{10}$ bringen Sie die 64-Bit-Darstellung (*) von y in die Form $\frac{1}{10} \cdot (1 \pm 2^{-p})$ mit $p > 0$.)