

Mathematik IT 3 (Analysis)

für die Studiengänge Informatik, IMT und eBusiness im Wintersemester 2012/2013

Geben Sie Ihren Namen, Matr.-Nr., Übungsgruppe auf Ihrer Lösung an und heften Sie alle Blätter zusammen!

Übungsblatt 8 - Abgabe bis Dienstag, 11.12.2012, 12:00 Uhr im Postfach 32 im HG

Aufgabe 26 (7 Punkte)

(a) Weisen Sie nach, dass gilt: $n^2 + 2n^2 + 1 = o\left(\frac{1}{3}n^5 + n^3 + 26\right)$

(b) Gegeben sei folgender Matlab-Algorithmus:

```
01 function[a] = berechneFolge(n)
02     a = zeros(1,n+1);
03     i = 1;
04     while (i <= n)
05         j = i;
06         while (j <= n)
07             a(i+1) = a(i+1) + j;
08             a(i+1) = a(i+1)*2;
09             a(i+1) = a(i+1) + a(i);
10             j = j + 1;
11         end
12         i = i + 1;
13     end
```

Der Befehl `a = zeros(1,n+1)` erzeugt einen Nullvektor der Länge $n + 1$.

- (i) Welches Ergebnis liefert der Algorithmus für $n = 2$ und für $n = 5$?
- (ii) Bestimmen Sie die Laufzeit des Algorithmus in Abhängigkeit von $n \in \mathbb{N}$ unter Verwendung des Landau-Symbols $\mathcal{O}$.

Aufgabe 27 (8 Punkte)

Beweisen Sie mit Hilfe des $\varepsilon - \delta$ -Kriteriums der Stetigkeit die folgenden Aussagen:

(a) Die Funktion $f(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ 1 & , \quad x \geq 0 \end{cases}$ ist für alle $x_0 \neq 0$ stetig.

(b) Die Funktion $f(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ 1 & , \quad x \geq 0 \end{cases}$ ist in $x_0 = 0$ nicht stetig.

(c) Die Funktion $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ ist stetig für alle $x \in \mathbb{R}$.

(Aufgaben 28 und 29 - siehe Seite 2)

Aufgabe 28 (9 Punkte)

Weisen Sie mit Hilfe der Definition des Funktionsgrenzwertes nach, dass die folgenden Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ im angegebenen Punkt $a \in \mathbb{R}$ stetig sind:

(a) $f(x) = \frac{x^k + x^{k-1} - 2}{x^{k+1} - 1}$ für $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ist stetig in $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$

(b) $f(x) = \max\left(-x, \frac{1}{2}x^2\right)$ ist stetig in $a \in \mathbb{R}$

Aufgabe 29 (8 Punkte)

Bestimmen Sie den Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}$ der folgenden Funktionen und untersuchen Sie, ob die Funktionen auf ganz D stetig sind. Falls dabei eine Funktion in einem oder mehreren Punkten $x_0 \in \mathbb{R}$ nicht definiert sein sollte, dann überprüfen Sie, ob f in x_0 stetig ergänzbar ist.

(a) $f(x) := \frac{|x| + 3x^2 - 7}{x^2 + |x| + 1}$

(b) $f(x) := \frac{x^n - 1}{x^m - 1}$ für $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $m \in \{2k + 1 \mid k \in \mathbb{N}\}$

(c) $f(x) := \begin{cases} e^{x-1} & \text{für } x < 1 \\ 2\sqrt{x} - 1 & \text{für } 1 \leq x \leq 4 \\ \frac{12}{x} & \text{für } x > 4 \end{cases}$

(Hinweis zu (b): Polynomdivision mit $(x - x_0)$ für geeignetes $x_0 \in \mathbb{R}$ im Zähler und im Nenner durchführen!)