

Mathematik IT 3 (Analysis)

für die Studiengänge Informatik, IMT und eBusiness im Wintersemester 2012/2013

Geben Sie Ihren Namen, Matr.-Nr., Übungsgruppe auf Ihrer Lösung an und heften Sie alle Blätter zusammen!

Übungsblatt 9 - Abgabe bis Dienstag, 18.12.2012, 12:00 Uhr im Postfach 32 im HG

Aufgabe 30 (6 Punkte)

Weisen Sie mit Hilfe der Definition des Funktionsgrenzwertes nach, dass der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ für die angegebenen Funktionen f in den jeweiligen Punkten x_0 nicht existiert:

(a) $f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}$ in $x_0 := -1$

(b) $f(x) = \frac{x+2}{\exp(x-2)} \cdot \exp\left(-\frac{1}{x-2}\right)$ in $x_0 := 2$

(c) $f(x) := x - \lceil x \rceil$ für alle $x_0 \in \mathbb{Z}$

Aufgabe 31 (20 Punkte)

Bestimmen Sie den Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}$ der folgenden Funktionen und untersuchen Sie, ob die Funktionen auf ganz D stetig sind. Falls dabei eine Funktion in einem oder mehreren Punkten $x_0 \in \mathbb{R}$ nicht definiert sein sollte, dann überprüfen Sie, ob f in x_0 stetig ergänzbar ist.

(a) $f(x) := \frac{x-5}{x^3-3x^2-x+3}$

(b) $f(x) := \frac{\sqrt{5+3x}-2}{3x+1}$

(c) $f(x) := (x - \lceil x \rceil) \cdot |x + \frac{1}{2}|$

(d) $f(x) := \begin{cases} \cos\left(\frac{1}{x+\pi}\right) & , \quad x \neq -\pi \\ 1 & , \quad x = -\pi \end{cases}$

Aufgabe 32 (8 Punkte)

Sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$ und $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sei eine stetige Funktion. Der Zwischenwertsatz besagt: Gilt $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$, dann gibt es ein $c \in (a, b)$ mit $f(c) = 0$. Diese in der Vorlesung bewiesene Variante des Zwischenwertsatzes wird auch Nullstellensatz genannt.

(a) Beweisen Sie die folgende, allgemeinere Version des Zwischenwertsatzes: Sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sei eine stetige Funktion und $d \in \mathbb{R}$. Gilt $f(a) < d < f(b)$, dann gibt es ein $c \in (a, b)$ mit $f(c) = d$.

(b) Sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sei eine stetige Funktion und $d \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie: Gilt $f(a) > d > f(b)$, dann gibt es ein $c \in (a, b)$ mit $f(c) = d$.

(c) Geben Sie ein Beispiel einer stetigen Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$ mit $f(\inf(D)) < f(\sup(D))$ sowie Wertepaare (c, d) an, für die der Zwischenwertsatz aufgrund nicht erfüllter Voraussetzung(en) nicht gilt. Begründen Sie Ihre Behauptung(en)!

(Aufgabe 33 - siehe Seite 2)

Aufgabe 33 (10 Punkte)

Zur Lösung der folgenden Teilaufgaben (a) bis (d) ist das $\varepsilon - \delta$ -Kriterium der Stetigkeit zu verwenden!¹

- (a) Seien $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ und $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen und $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sei definiert durch $h(x) := f(x) - g(x)$ für alle $x \in [a, b]$. Weisen Sie nach, dass die Funktion h auf $[a, b]$ ebenfalls stetig ist.
- (b) In der Aufgabe Ü31.(b) wurde in den Übungsstunden die Abschätzung $|\sin(x) - x| \leq \frac{|x|^3}{6}$ für alle $x \in [-1, 1]$ bewiesen. Weisen Sie mit Hilfe dieser Abschätzung und des $\varepsilon - \delta$ -Kriteriums der Stetigkeit nach, dass die Funktion $f : [-1, 1] \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) := \frac{\sin(x)}{x}$ in $x_0 = 0$ stetig ergänzbar ist mit dem Funktionswert $f(0) := 1$.
- (c) Weisen Sie nach, dass die Funktion $f(x) := (x - 1) \cdot \sin\left(\frac{x + 2}{x - 1}\right)$ in $x_0 = 1$ stetig ergänzbar ist.
- (d) Zeigen Sie, dass die Funktion $f(x) := \begin{cases} \frac{x+2}{x+1} & , \quad x \neq -1 \\ 0 & , \quad x = -1 \end{cases}$ in $x_0 = -1$ nicht stetig ist.

(Hinweis zu (c): Stellen Sie zunächst eine Vermutung für den Funktionswert $f(1)$ auf!)

¹Die Verwendung anderer Methoden zieht eine Bewertung der betreffenden Aufgabenteile mit Null Punkten nach sich, unabhängig davon, ob der jeweilige Beweis richtig oder falsch ist!