

Mathematik IT 3 (Analysis)

für die Studiengänge Informatik, IMT und eBusiness im Wintersemester 2012/2013

Geben Sie Ihren Namen, Matr.-Nr., Übungsgruppe auf Ihrer Lösung an und heften Sie alle Blätter zusammen!

Übungsblatt 10 - Abgabe bis Dienstag, 08.01.2013, 12:00 Uhr im Postfach 32 im HG

Aufgabe 34 (8 Punkte)

Untersuchen Sie, ob die folgenden stetigen Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ einmal *stetig differenzierbar* sind. Wenn dies der Fall ist, dann geben Sie die erste Ableitung $f' : D \rightarrow \mathbb{R}$ von f an, wobei $D \subseteq \mathbb{R}$ alle Punkte des Definitionsbereichs von f enthält, in denen f differenzierbar ist.

$$(a) \quad f(x) := \begin{cases} e^{x-1} & \text{für } x < 1 \\ 2\sqrt{x} - 1 & \text{für } 1 \leq x \leq 4 \\ \frac{12}{x} & \text{für } x > 4 \end{cases}$$

$$(b) \quad f(x) := \begin{cases} 5x \cdot \cos\left(\frac{2}{x}\right) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

(Hinweis: Die Stetigkeit der Funktionen f muss nicht extra nachgewiesen werden.)

Aufgabe 35 (11 Punkte)

Gegeben seien die folgenden Funktionen $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Geben Sie den größtmöglichen Definitionsbereich D der Funktionen an und berechnen Sie die erste Ableitung der Funktionen f .

$$(a) \quad f(x) = \exp(\sin(\cos(x^2)))$$

$$(b) \quad f(x) = \ln\left(\exp(x^2) \cdot \frac{x^2+1}{x^4+1} \cdot 5^x\right)$$

$$(c) \quad f(x) = |\sin(2x)|$$

(Hinweis zu (c): Untersuchen Sie insbesondere auch die Differenzierbarkeit in den Nullstellen von f !)

Aufgabe 36 (6 Punkte)

Sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$ und $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sei eine stetige und stetig differenzierbare Funktion. Der Zwischenwertsatz (in der Variante als Nullstellensatz) besagt: Gilt $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$, dann gibt es ein $c \in (a, b)$ mit $f(c) = 0$. Für welche der folgenden Funktionenklassen folgt stets die Eindeutigkeit des Punktes $c \in (a, b)$ (unabhängig von weiteren, nicht bekannten Eigenschaften der Funktion f)? Beweisen Sie die von Ihnen gewählte Behauptung und begründen Sie, warum die anderen drei Funktionenklassen die Eindeutigkeit nicht erfüllen!

- ☐ (a) Für jede beliebige stetige und stetig differenzierbare Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.
- ☐ (b) Für keine Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.
- ☐ (c) Für jede stetige und stetig differenzierbare Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, für die $f'(x) > 0$ für alle $x \in [a, b]$ oder $f'(x) < 0$ für alle $x \in [a, b]$ gilt.
- ☐ (d) Für jede stetige und stetig differenzierbare Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, für die $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$ oder $f'(x) \leq 0$ für alle $x \in [a, b]$ gilt.

(Aufgaben 37 bis 40 - siehe Seite 2)

Aufgabe 37 (23 Punkte)

- (a) Zeigen Sie, dass es genau ein $x \in \mathbb{R}$ mit $-\sin(2x) = -5x + 12$ gibt.
- (b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Gleichung $\sin(x) - \cos(x) = \sqrt{\frac{3}{2}}$.
- (c) Weisen Sie nach, dass die auf dem Intervall $[a, b] = [-3, 2]$ definierte Funktion $f(x) := \frac{5x-1}{3x^2+1}$ alle Voraussetzungen des Fixpunktsatzes erfüllt und berechnen Sie *alle* Fixpunkte von f in $[a, b]$.

(Hinweise: Die Lösung der Gleichung in (a) soll nicht berechnet werden! Zu (b): Additionstheoreme! Betrachten Sie bei (c) unter anderem die lokalen und globalen Extremwerte der Funktion f im Intervall $[-3, 2]$ und diskutieren Sie das Monotonieverhalten der Funktion. Ausnahmsweise dürfen Sie alle für (c) benötigten Funktionswerte näherungsweise mit dem Taschenrechner berechnen.)

Aufgabe 38 (6 Punkte)

Gegeben sei die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) := 2xe^{-2x+1}$. Führen Sie für f eine Kurvendiskussion mit folgendem Inhalt durch: Nullstellen, Koordinaten der lokalen Extrempunkte, Art der lokalen Extrema und Koordinaten der Wendepunkte. Skizzieren den Funktionsgraphen über einem hinreichend großen Intervall, das alle Nullstellen, lokalen Extrem- und Wendepunkte enthält (Maßstab: 4 cm = 1 Längeneinheit).

Aufgabe 39 (11 Punkte)

Untersuchen Sie die folgenden Funktionen f auf Umkehrbarkeit im angegebenen Intervall D . Falls die Funktion umkehrbar ist, dann berechnen Sie die Ableitung der Umkehrfunktion an der Stelle y_0 .

- (a) $f(x) = e^{5x^2-1}$, $D = \mathbb{R}$, $y_0 = e^4$
- (b) $f(x) = e^{5x^2-1}$, $D = (0, \infty)$, $y_0 = e^4$
- (c) $f(x) = 5x^3 + 2x - \frac{1}{5} \cos(x) \sin(x)$, $D = \mathbb{R}$, $y_0 = 0$

Aufgabe 40 (6 Punkte)

Auf zwei geradlinig verlaufenden Straßen, die einander senkrecht kreuzen, fahren zwei Fahrzeuge senkrecht zueinander auf die Kreuzung zu und dann weiter geradeaus). Fahrzeug A hat eine konstante Geschwindigkeit von $10 \frac{m}{s}$, Fahrzeug B fährt konstant mit $15 \frac{m}{s}$. Zum Zeitpunkt $t = 0$ passiert Fahrzeug A genau die Kreuzungsmitte, während Fahrzeug B noch 60 m von der Kreuzungsmitte entfernt ist. Zu welchem Zeitpunkt t sind die beiden Fahrzeuge einander am nächsten? Wie weit sind sie dann voneinander entfernt und wie weit sind sie jeweils von der Kreuzungsmitte entfernt?



Frohe Weihnachten und einen erfolgreichen Start ins Jahr 2013
wünschen die Mitarbeiter des Lehrstuhls für Numerische und Angewandte Mathematik.