

Mathematik IT 3 (Analysis)

für die Studiengänge Informatik, IMT und eBusiness im Wintersemester 2012/2013

Geben Sie Ihren Namen, Matr.-Nr., Übungsgruppe auf Ihrer Lösung an und heften Sie alle Blätter zusammen!

Übungsblatt 11 - Abgabe bis Dienstag, 15.01.2013, 12:00 Uhr im Postfach 32 im HG

Aufgabe 41 (5 Punkte)

Gegeben sei die Funktion $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) := \frac{\ln(x)+1}{x}$. Führen Sie für f eine Kurvendiskussion mit folgendem Inhalt durch: Nullstellen, Koordinaten der lokalen Extrempunkte, Art der lokalen Extrema und Koordinaten der Wendepunkte.

Aufgabe 42 (10 Punkte)

Die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei definiert durch $f(x) := |x^2 - 1|$.

- (a) Zeigen Sie, dass f für alle $x \in \mathbb{R}$ stetig ist.
- (b) Untersuchen Sie, ob f für alle $x \in \mathbb{R}$ stetig differenzierbar ist.
- (c) Bestimmen Sie die Koordinaten der lokalen Extremstellen von f .

(Hinweis: Eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt stetig differenzierbar, wenn sie differenzierbar ist und ihre Ableitung f' stetig ist für alle $x \in \mathbb{R}$.)

Aufgabe 43 (15 Punkte)

- (a) Berechnen Sie den Grenzwert $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^4 + x^3 + x^2 + x + 17) \cdot e^{-2x}$ mit der Regel von l'Hospital.
- (b) Berechnen Sie den Grenzwert $\lim_{x \uparrow 1} (1-x)^{6(1-x)}$ mit der Regel von l'Hospital.
- (c) Untersuchen Sie, ob der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) + \cos(x)}{x}$ existiert. Warum kann die Regel von l'Hospital hier nicht angewendet werden?
- (d) Zeigen Sie, dass die stetige Funktion $f(x) := \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ 1 & \text{für } x = 0 \end{cases}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ stetig differenzierbar ist und geben Sie $f'(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ an.

(Hinweis zu (b): Nutzen Sie den Zusammenhang zwischen der Exponentialfunktion und ihrer Umkehrfunktion.

Hinweis zu (d): Die Stetigkeit von f muss nicht extra nachgewiesen werden, siehe dazu Aufgabe 30.(b).)

Aufgabe 44 (5 Punkte)

Sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$ und $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sei eine stetige und mindestens zweimal stetig differenzierbare Funktion. Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung existiert ein $c \in (a, b)$ mit $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$. Zeigen Sie: Gilt $f''(x) > 0$ für alle $x \in [a, b]$ oder $f''(x) < 0$ für alle $x \in [a, b]$, dann ist $c \in (a, b)$ eindeutig bestimmt.