

Mathematik IT 3 (Analysis)

für die Studiengänge Informatik, IMT und eBusiness im Wintersemester 2012/2013

Geben Sie Ihren Namen, Matr.-Nr., Übungsgruppe auf Ihrer Lösung an und heften Sie alle Blätter zusammen!

Übungsblatt 12 - Abgabe bis Dienstag, 22.01.2013, 12:00 Uhr im Postfach 32 im HG

Aufgabe 45 (10 Punkte)

Entwickeln Sie die folgenden Funktionen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ um den angegebenen Entwicklungspunkt x_0 in eine Taylorreihe. Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Taylorreihe von f ?

(a) $f(x) = 5^{2x+1}$ um den Entwicklungspunkt $x_0 = 1$

(b) $f(x) = \frac{1}{1-x}$ um den Entwicklungspunkt $x_0 = \frac{1}{2}$

(Hinweis/Zusatz: Stellen Sie zunächst eine Vermutung für die n -te Ableitung ($n \in \mathbb{N}$) von f auf und beweisen Sie diese mit vollständiger Induktion! Beweisen Sie bei (a) insbesondere auch die erste Ableitung $f'(x)$.)

Aufgabe 46 (5 Punkte)

Berechnen Sie das Taylorpolynom 3. Grades der Funktion $f(x) = \sin(x) \cos(x) + \cos(2x) + 1$ um den Entwicklungspunkt $x_0 = \frac{\pi}{4}$. Weisen Sie außerdem nach, dass für das Restglied $R(x)$ die Abschätzung $|R(x)| < \frac{\pi^4}{20000}$ für alle $x \in [\frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{3}]$ gilt.

Aufgabe 47 (8 Punkte)

Die Treppenfunktionen $f, g: [0, 8] \rightarrow \mathbb{R}$ seien durch $f(x) := \lfloor \frac{x}{3} \rfloor$ und $g(x) := 1 + \lfloor \frac{x^2}{16} \rfloor$ definiert.

(a) Geben Sie möglichst einfache Zerlegungen Δ_f und Δ_g des Intervalls $[0, 8]$ an, so dass f im Inneren der Teilintervalle von Δ_f und g im Inneren der Teilintervalle von Δ_g konstant sind. Berechnen Sie damit die bestimmten Integrale $\int_0^8 f(x) dx$ und $\int_0^8 g(x) dx$.

(b) Bilden Sie eine gemeinsame Verfeinerung Δ der Zerlegungen Δ_f und Δ_g und ermitteln Sie damit den Wert des bestimmten Integrals $\int_0^8 \frac{f(x)}{g(x)} dx$.

Aufgabe 48 (11 Punkte)

Berechnen Sie die folgenden unbestimmten bzw. bestimmten Integrale:

(a) $\int \left[\frac{2}{5} x \sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt[3]{x}} + \frac{7}{x} - 3x^2 + \pi x - e \right] dx, x > 0$

(b) $\int_0^1 x^2 \cdot e^{-x} dx$

(c) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(\pi - x) dx$

(d) $\int \sin^2(x) dx$