

Mathematik IT 3 (Analysis)

für die Studiengänge Informatik, IMT und eBusiness im Wintersemester 2012/2013

Geben Sie Ihren Namen, Matr.-Nr., Übungsgruppe auf Ihrer Lösung an und heften Sie alle Blätter zusammen!

Übungsblatt 15 - Abgabe bis **Freitag, 15.02.2013, 12:00 Uhr** im Postfach 32 im HG

Die Korrektur Ihrer Lösungen erfolgt nur, wenn Sie noch nicht 50 % der Übungspunkte erreicht haben, die sich aus den Ergebnissen der Übungsblätter 1 bis 14 ergeben.

Aufgabe 55 (10 Punkte)

Berechnen Sie die Koeffizienten a_k und b_k der Fourierreihe $p(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$ für die 2π -periodische Funktion

$$f(x) := \begin{cases} e^x - 1 & , \quad x \in [-\pi, 0) \\ \cos\left(\frac{1}{2}x\right) & , \quad x \in [0, \pi) \end{cases}$$

Verwenden Sie ggf. schon bekannte Teilergebnisse aus den Übungsstunden bzw. zurückliegenden Hausaufgaben und vereinfachen Sie die Koeffizienten a_k und b_k soweit wie möglich!

Aufgabe 56 (6 Punkte)

Bestimmen Sie die Lösungen der folgenden Differentialgleichungen:

(a) $y' + y \sin(x) = 0$

(b) $y' = 1 + \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2$

Hinweis zu (b): Verwenden Sie die Substitution $z := \frac{y}{x}$.

Aufgabe 57 (15 Punkte)

Lösen Sie die folgenden Anfangswertaufgaben:

(a) $y(1+x^2)y' = (1+y^2)x \quad y > 0 \quad \text{mit} \quad y(1) = 3$

(b) $y' = x^2y^2 - 3x^2y \quad \text{mit} \quad y(0) = 1$

(c) $y' = e^{-\lambda_1 x} - \lambda_2 y \quad \text{mit} \quad y(0) = 0, \quad \text{wobei } \lambda_1 > 0 \text{ und } \lambda_2 > 0 \text{ feste Konstanten sind}$

Hinweis zu (b): Durch Umformung erreicht man Produktform, nach Variablentrennung vor der Integration ggf. Partialbruchzerlegung auf einer Seite durchführen.

Hinweis zu (c): Unterscheiden Sie die Fälle $\lambda_1 \neq \lambda_2$ und $\lambda_1 = \lambda_2$!

(Aufgaben 58 bis 63 auf Seite 2 und 3)

Aufgabe 58 (5 Punkte)

In einem Zimmer sitzen vier Skatbrüder, sie sitzen wie angenagelt, spielen und spielen, rauchen und rauchen. Zigarettenrauch enthält etwa 4 Volumenprozent Kohlenmonoxyd (CO). Dieses Gas ist ungemein giftig (gleichzeitig billig zu beschaffen und wird deshalb von sparsamen Selbstmördern hoch geschätzt). Das Zimmer enthalte V Liter Luft, die Skatspieler mögen Z Liter Zigarettenrauch pro Minute ausstoßen. Der Rauch vermische sich sofort und vollständig mit der Zimmerluft, und diese Mischung ziehe mit der Ausstoßrate des Rauches aus dem Zimmer ab. Welche CO-Konzentration $c(t)$ ist t Minuten nach dem Beginn der Skatrunde in dem Zimmer (das angeblich anfänglich frei von CO gewesen sein soll)?

Aufgabe 59 (16 Punkte)

Untersuchen Sie die folgenden Mengen auf die Existenz von Infimum, Supremum, Minimum und Maximum. Geben Sie diese Werte im Fall der Existenz an.

- (a) $A := \{x \in \mathbb{R} \mid ||x - 5| - 3| \leq 4\}$
- (b) $B := \{x \in \mathbb{R} \mid |\frac{1}{4}x^2 - 17| < 8\}$
- (c) $C := \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0 \text{ und } x^2 + 2x + 2 \geq 5\}$
- (d) $D := \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$
- (e) $E := \{x \in \mathbb{Z} \mid 15 \leq x^4 - 1 \leq 35\}$

Aufgabe 60 (14 Punkte)

Untersuchen Sie die Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit den angegebenen Gliedern auf Konvergenz bzw. Divergenz und bestimmen Sie ggf. deren Häufungspunkte bzw. Grenzwerte.

- (a) $a_n := \frac{2n(n+1)(n-1)}{n^3 + 1}$
- (b) $a_n := \frac{\sqrt{n}(n^2 + 2n - 3)}{n^2 - 8}$
- (c) $a_n := \sqrt{2n + \sqrt{n}} - \sqrt{2n - \sqrt{n}}$
- (d) $a_0 := \sqrt{2}$ und $a_n := \sqrt{2 + \sqrt{a_{n-1}}}$ für $n \geq 1$
- (e) $a_n := \left(3n - 9 \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor\right) \cdot \frac{(-1)^n n^2}{2n^2 + n + 5}$

Aufgabe 61 (10 Punkte)

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz:

- (a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n+1} + 4^{n-2}}{6^n}$
- (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1 + 4(-1)^n)^n}$
- (c) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{n^2 + 7n + 1}{\exp(n)} \right)$
- (d) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\left| x \right| - \frac{1}{4} \right)^n$ für $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$

(Fortsetzung auf Seite 3)

(e) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n-1}$

Aufgabe 62 (16 Punkte)

Gegeben sei eine Schar von Funktionen $f_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f_k(x) = kxe^{-kx^2}$, wobei $k \in (0, \infty)$.

- (a) Bestimmen Sie die Koordinaten und die Art der lokalen Extrempunkte der Funktion f_k . Untersuchen Sie außerdem das Verhalten der Funktion im Unendlichen.
- (b) Gegeben sei eine weitere Funktionenschar $g_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $g_k(x) := |f_k(x)|$, $k \in (0, \infty)$.
- Begründen Sie (ohne Rechnung), dass g_k auf $\mathbb{R}$ stetig ist.
 - Ist g_k überall auf $\mathbb{R}$ stetig differenzierbar?
 - Geben Sie für g_k die Koordinaten und Art der lokalen Extrempunkte an (mit kurzer Begründung bzw. ohne zusätzliche Rechnungen).

Aufgabe 63 (16 Punkte)

- (a) Untersuchen Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) := \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{(x-2)^2}\right) & , \quad x \neq 2 \\ 0 & , \quad x = 2 \end{cases}$ auf Stetigkeit.
- (b) Ist die Funktion $f(x) := \frac{x^2 + x - 2}{x - 1}$, $x \neq 1$ in $x = 1$ stetig ergänzbar?
- (c) Untersuchen Sie, ob die stetige Funktion $f(x) = \begin{cases} 2x & , \quad x \leq 0 \\ \sin(2x) & , \quad x > 0 \end{cases}$ in $x = 0$ differenzierbar ist.
- (d) Sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Die Funktion $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sei in $[a, b]$ stetig, in (a, b) differenzierbar und es gelte $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$. Zeigen Sie, dass $g(a) \neq g(b)$ gilt.
- (e) Bestimmen Sie den Grenzwert $\lim_{x \uparrow 1} \frac{\frac{\pi}{2} - \arcsin(x)}{\sqrt{1-x}}$ mit Hilfe der Regeln von l'Hospital.
- (f) Berechnen Sie das unbestimmte Integral $\int x \cdot 4^{2x} dx$ mittels partieller Integration.
- (g) Berechnen Sie $\int_3^{\sqrt{14}} \frac{2x}{(x-2)(x+2)} dx$ mit der Substitutionsmethode.

(Hinweis zu (d): Satz von Rolle)