

Mathematik IT 3 (Analysis)

für die Studiengänge Informatik, IMT und eBusiness im Wintersemester 2012/2013

Aufgaben für die Übungen vom 24. bis 26.10.2012

Aufgabe Ü4

- (a) Welche der folgenden Mengen bilden mit der üblichen Addition und Multiplikation einen Körper?
(i) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ (ii) $(\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_2, +, \cdot)$ (iii) $(\mathbb{N}, +, \cdot)$
- (b) Beweisen Sie die folgenden Behauptungen im Körper der reellen Zahlen $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ unter alleiniger Verwendung der Körperaxiome:
(i) $(-1) \cdot (-1) = 1$ (ii) $(-a) \cdot (-a) = a^2$ (iii) Es gibt kein multiplikatives Inverses von 0.
- (c) Beweisen Sie unter alleiniger Verwendung der Anordnungsaxiome, dass für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und beliebiges $c \in \mathbb{R}$ gilt: $a + c < b + c$
- (d) Es seien A und B nichtleere Teilmengen von $\mathbb{R}$, und es gelte $x < y$ für alle $x \in A$ und $y \in B$. Gibt es dann stets ein $c \in \mathbb{R}$, so dass für alle $x \in A$ und $y \in B$ gilt $x < c < y$? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe Ü5

Geben Sie (falls möglich) in $\mathbb{R}$ Infimum, Supremum, Minimum und Maximum der nachfolgenden Mengen M an:

- (a) $M := [-1, 2]$
(b) $M := (-1, 2)$
(c) $M := [-1, 2)$
(d) $M := \{-1000, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10\}$
(e) $M := (-5, -3) \cup (-2, -1) \cup \{0\} \cup (1, 3) \cup (3, 5) \cup \{5 + 10^{-10000}\}$
(f) $M := \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Aufgabe Ü6

Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, die nachfolgende Ungleichungen erfüllen. Untersuchen Sie außerdem die Lösungsmengen auf die Existenz von Infimum, Supremum, Minimum und Maximum und geben Sie diese im Fall ihrer Existenz an.

- (a) $x + 2 < 2x - 3$
(b) $x^2 > x + 2$
(c) $\frac{3}{2x - 4} < 2$
(d) $\frac{x - 3}{x + 1} > \frac{x + 2}{x - 1}$
(e) $|x^2 - 9| \leq 8x$

Aufgabe Ü7

A und B seien beschränkte und nichtleere Teilmengen der reellen Zahlen mit $A \subset B$. Zeigen Sie, dass $\inf(B) \leq \inf(A) \leq \sup(A) \leq \sup(B)$ gilt, und geben Sie zwei Beispiele für Mengen A und B an, bei denen in den behaupteten Ungleichungen an genau einer Stelle die Gleichheit gilt.