

Mathematik IT 3 (Analysis)

für die Studiengänge Informatik, IMT und eBusiness im Wintersemester 2012/2013

Aufgaben für die Übungen vom 14. bis 16.11.2012

Aufgabe Ü15

Geben Sie jeweils ein Beispiel von Folgen reeller Zahlen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ an, so dass die folgenden Fälle eintreten:

- (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \infty$
- (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = -\infty$
- (c) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = c$, wobei $c \in \mathbb{R}$ beliebig ist
- (d) Die Folge $(a_n \cdot b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist beschränkt, aber nicht konvergent.

Aufgabe Ü16

Untersuchen Sie die folgenden divergenten Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, \dots, (f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auf die Existenz von Häufungspunkten. Falls Häufungspunkte existieren, dann geben Sie diese an.

- (a) $a_n := (-1)^n$
- (b) $b_n := \frac{(-1)^n n^2}{2n^2 + n + 5}$
- (c) $c_n := \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)$
- (d) $d_n := a_n + b_n$
- (e) $e_n := a_n + c_n$
- (f) $f_n := b_n \cdot c_n$

Aufgabe Ü17

- (a) Weisen Sie nach, dass die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$ mit $a_n := \frac{1}{n}$ eine Cauchy-Folge ist.
- (b) Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine reelle Folge mit der Eigenschaft, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$|a_{n+1} - a_n| < \frac{1}{2^n}.$$

Zeigen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert. (Hinweis: Es gilt $\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^k \frac{1}{2^n} = 2$.)

Aufgabe Ü18

Weisen Sie mit Hilfe der $\varepsilon - n_0$ -Definition der Konvergenz nach, dass die komplexwertige Folge $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$c_n := \left(\frac{1+i}{3i} - \frac{1-i}{1+i} \right)^{2n}$$

gegen Null konvergiert.