

Mathematik IT 3 (Analysis)

für die Studiengänge Informatik, IMT und eBusiness im Wintersemester 2012/2013

Aufgaben für die Übungen vom 12. bis 14.12.2012

Aufgabe Ü29

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ durch $f(x) := |x| + 3x^2 - 7$. Untersuchen Sie f auf Stetigkeit und berechnen Sie die Funktionswerte $f(0)$ und $f(3)$. Gibt es ein $x \in \mathbb{Z}$ mit $f(x) = -3$ oder $f(x) = 5$? Stellen Sie einen Zusammenhang mit dem Zwischenwertsatz her.

Aufgabe Ü30

Sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$ und $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ sei eine stetige Funktion.

- (a) Beweisen Sie mit Hilfe des Zwischenwertsatzes, dass f einen *Fixpunkt* hat, d.h. ein $x \in [a, b]$ mit $f(x) = x$ existiert.
- (b) Weisen Sie nach, dass die auf dem Intervall $[a, b] = [-2, 2]$ definierte Funktion $f(x) := \frac{x+2}{2x+5}$ alle Voraussetzungen des Fixpunktsatzes erfüllt und berechnen Sie alle Fixpunkte von f .
- (c) Geben Sie ein Beispiel für ein offenes Intervall (a, b) und eine stetige Funktion $f : (a, b) \rightarrow (a, b)$ an, so dass f keinen Fixpunkt hat.

Aufgabe Ü31

- (a) Verwenden Sie die Definition der Exponentialfunktion durch die unendliche Reihe $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ zum Beweis der Ungleichung $1 + x \leq e^x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
- (b) Weisen Sie nach, dass die Abschätzung $|\sin(x) - x| \leq \frac{|x|^3}{3}$ für alle $x \in [-1, 1]$ gilt.

Aufgabe Ü32

Beweisen Sie die folgenden Behauptungen:

- (a) $f(x) := x^2$ ist im Intervall $[0, \infty)$ nicht gleichmäßig stetig
- (b) $f(x) := \ln(x)$ ist in Intervall $[a, \infty)$ mit $a > 0$ gleichmäßig stetig.
- (c) $f(x) := \ln(x)$ ist im Intervall $(0, \infty)$ nicht gleichmäßig stetig.