

Mathematik IT 3 (Analysis)

für die Studiengänge Informatik, IMT und eBusiness im Wintersemester 2012/2013

Aufgaben für die Übungen vom 19. bis 21.12.2012

Aufgabe Ü33

Weisen Sie mit Hilfe des Differentialquotienten nach, dass die folgenden Behauptungen richtig sind:

- (a) $f'(x_0) = 4x_0 + 3$ ist die Ableitung von $f(x) := 2x^2 + 3x - 9$ für alle $x_0 \in \mathbb{R}$
- (b) $f'(x) = -\sin(x)$ ist die Ableitung von $f(x) := \cos(x)$

Aufgabe Ü34

Es seien $a > 0$ und $f : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Für ein $\beta > 1$ gelte $|f(x)| \leq |x|^\beta$ für alle $x \in [-a, a]$. Zeigen Sie, dass f in $x_0 = 0$ differenzierbar ist und $f'(0) = 0$ gilt.

Aufgabe Ü35

Untersuchen Sie, für welche $x \in D \subseteq \mathbb{R}$ die folgenden stetigen Funktionen $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ für alle $x \in D \subseteq \mathbb{R}$ einmal *stetig differenzierbar* sind. Geben Sie für diese $x \in D$ die erste Ableitung von f an.

- (a) $f(x) := x \cdot \exp(\sin(x))$, $D = \mathbb{R}$
- (b) $f(x) := \frac{4x-4}{x^2}$, $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
- (c) $f(x) := \ln(8x^4 + 3x^2 + 1)$, $D = \mathbb{R}$
- (d) $f(x) := |x + 1|$, $D = \mathbb{R}$
- (e) $f(x) := \begin{cases} \sqrt{x} & , \quad x \geq 1 \\ \exp\left(\frac{x-1}{2}\right) & , \quad x < 1 \end{cases}$, $D = \mathbb{R}$

Aufgabe Ü36

Gegeben sei die Funktion $f(x) := (x + 1) \cdot e^{-x}$. Führen Sie für f eine Kurvendiskussion mit folgendem Inhalt durch: Nullstellen, Koordinaten der lokalen Extrempunkte, Art der lokalen Extrema, Monotonieverhalten und Koordinaten der Wendepunkte. Stellen Sie außerdem eine Gleichung der Wendetangenten $t : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ an den Graphen der Funktion f auf.

Aufgabe Ü37

- (a) Zeigen Sie, dass $f : [0, \infty) \rightarrow W$ mit $f(x) := \sqrt{4x}$ umkehrbar ist und berechnen Sie die Ableitung der Umkehrfunktion an der Stelle $y_0 := 1$. Dabei ist $W := f(D)$ der Wertebereich der Funktion.
- (b) Weisen Sie nach, dass die Funktion $f : D \rightarrow W$ mit $f(x) := \frac{\sqrt{x}}{x+1}$ umkehrbar ist und berechnen Sie die Ableitung der Umkehrfunktion an der Stelle $y_0 := \frac{2}{5}$. Betrachten Sie dabei die Definitionsbereiche $D = D_1 := (0, 1]$ sowie $D = D_2 := [1, \infty)$. Ist die Funktion auch auf $D := D_1 \cup D_2$ umkehrbar? Auch hier bezeichnet $W := f(D)$ den entsprechenden Wertebereich.