

Mathematik IT 3 (Analysis)

für die Studiengänge Informatik, IMT und eBusiness im Wintersemester 2012/2013

Aufgaben für die Übungen vom 09. bis 11.01.2013

Aufgabe Ü38

Sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Weisen Sie nach, dass die n -te Ableitung des Polynoms $p(x) = (x^2 - 1)^n$ genau n verschiedene reelle Nullstellen besitzt, die alle im Intervall $(-1, 1)$ liegen. (Hinweis: Eine k -fache Nullstelle eines Polynoms $p(x)$ ist auch Nullstelle der ersten $k - 1$ Ableitungen $p'(x), p''(x), \dots, p^{(k-1)}(x)$.)

Aufgabe Ü39

Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung besagt: Ist $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige und im offenen Intervall (a, b) differenzierbare Funktion: Dann gibt es ein $x_0 \in (a, b)$ mit $f(b) - f(a) = f'(x_0)(b - a)$. Überprüfen Sie den Mittelwertsatz, indem Sie für die folgenden Funktionen alle x_0 aus den angegebenen Intervallen $[a, b]$ bestimmen, für die $f(b) - f(a) = f'(x_0) \cdot (b - a)$ gilt:

(a) $f(x) = x^3 - 2x$ im Intervall $[0, 2]$

(b) $f(x) = |x - 2|$ im Intervall $[-1, 4]$

(c) $f(x) = \frac{1}{x}$ im Intervall $[1, 3]$

Aufgabe Ü40

(a) Gegeben sei die reellwertige Funktion $f : (-\pi, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) := \begin{cases} \frac{1 - \cos(x)}{\sin(x)} & , \quad x < 0 \\ \frac{\cos(x) - 1}{x} & , \quad x > 0 \\ c & , \quad x = 0 \end{cases}$$

wobei $c \in \mathbb{R}$. Kann man die Konstante c in der Funktion f so wählen, dass g in $x = 0$ stetig ist?

(b) Berechnen Sie den Grenzwert $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x) + 1}{x}$ nach der Regel von l'Hospital.

(c) Berechnen Sie $\lim_{x \downarrow 0} x^x$.

Aufgabe Ü41

(a) Entwickeln Sie die Funktion $f(x) = -\ln\left(1 - \frac{x}{2}\right)$ um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ in eine Taylorreihe $T_f(x)$. Welchen Konvergenzradius hat $T_f(x)$? Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert $T_f(x)$ gegen $f(x)$?

(b) Berechnen Sie das Taylorpolynom 3. Grades der Funktion $f(x) = \sin^2(x)$ um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$. Weisen Sie außerdem nach, dass für das Restglied $R(x)$ die Abschätzung $|R(x)| \leq \frac{1}{48}$ für alle $x \in [0, \frac{1}{2}]$ gilt.

(Hinweis: Stellen Sie bei (a) zunächst eine Vermutung für die n -te Ableitung ($n \in \mathbb{N}$) von f auf und beweisen Sie diese mit vollständiger Induktion!)