

Mathematik IT 3 (Analysis)

für die Studiengänge Informatik, IMT und eBusiness im Wintersemester 2012/2013

Aufgaben für die Übungen vom 16. bis 18.01.2013

Aufgabe Ü42

Zu einer beschränkten Funktion $f : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$, $a > 0$ seien $U(f)$ und $V(f)$ wie folgt definiert:

$$U(f) := \{g \mid g \text{ einfache Treppenfunktion zu einer äquidistanten Zerlegung } \Delta \text{ von } [0, a] \\ \text{mit } g(x) \leq f(x) \forall x \in [0, a]\}$$

$$V(f) := \{g \mid g \text{ einfache Treppenfunktion zu einer äquidistanten Zerlegung } \Delta \text{ von } [0, a] \\ \text{mit } g(x) \geq f(x) \forall x \in [0, a]\}$$

Außerdem seien $u_f := \sup \{ \int_0^a g(x) dx \mid g \in U(f) \}$ und $v_f := \inf \{ \int_0^a g(x) dx \mid g \in V(f) \}$ definiert.

- (a) Betrachten Sie die äquidistante Zerlegung $\Delta_4 := \{[0, 0.75]; [0.75, 1.5]; [1.5, 2, 2.5]; [2.25, 3]\}$ des Intervalls $[0, 3]$. Stellen Sie die Funktion $f(x) = \frac{1}{3}x$ im Intervall $[0, 3]$ sowie je eine Funktion $g \in U(f)$ und $h \in V(f)$ zur Zerlegung Δ_4 des Intervalls $[0, a] = [0, 3]$ in einer gemeinsamen Skizze grafisch dar, wobei für jedes Teilintervall $[x_j, x_{j+1})$ der Zerlegung Δ_4 gelten soll: $g(x_j) = f(x_j)$ bzw. $h(x_{j+1}) = f(x_{j+1})$ für $j = 0, 1, \dots, 3$. Zeichnen Sie in die Grafik außerdem auch die Flächen $\int_0^3 g(x) dx$ und $\int_0^3 h(x) dx$ ein. Verfahren Sie analog für eine weitere, aber feinere äquidistante Zerlegung Δ_n für $n \geq 6$.
- (b) Bestimmen Sie u_f und v_f zu $f(x) = \frac{1}{3}x$ für $x \in [0, a]$.
- (c) Ist $f(x) = \frac{1}{3}x$ integrierbar? Falls ja, dann begründen Sie dies unter Rückgriff auf die Definition von Ober- und Unterintegral und berechnen Sie $\int_0^a \frac{1}{3}x dx$.

Aufgabe Ü43

Berechnen Sie die folgenden bestimmten bzw. unbestimmten Integrale:

(a) $\int_1^2 \frac{2}{x^3} dx$

(e) $\int_0^4 e^{\sqrt{x}} dx$

(b) $\int (x+1) \sin(x) dx$

(f) $\int \frac{x+27}{x^2-9} dx$

(c) $\int \frac{x^2 - \sin(x)}{x^3 + 3 \cos(x)} dx$

(g) $\int_1^e x^2 \ln(x) dx$

(d) $\int e^{\sqrt{x}} dx$

(h) $\int_2^{2\sqrt{3}} \frac{1}{4+x^2} dx$

Aufgabe Ü44

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) := \frac{1}{2}x - 1$.

(a) Berechnen Sie $\int_1^3 f(x) dx$

- (b) Berechnen Sie den Flächeninhalt A der Fläche, die durch f , die x -Achse sowie die Geraden $x = 1$ und $x = 3$ begrenzt wird.