

Mathematik IT 3 (Analysis)

für die Studiengänge Informatik, IMT und eBusiness im Wintersemester 2012/2013

Aufgaben für die Übungen vom 23. bis 25.01.2013

Aufgabe Ü45

Berechnen Sie die folgenden unbestimmten bzw. bestimmten Integrale:

- (a) $\int \cos(px) \cos(kx) dx$ mit $p, k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
- (b) $\int \sin(px) \cos(kx) dx$ mit $p, k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Aufgabe Ü46

Untersuchen Sie, welche der folgenden uneigentlichen Integrale existieren und bestimmen Sie deren Wert:

- (a) $\int_2^\infty \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x} dx$
- (b) $\int_0^2 \frac{dx}{x^2}$

Aufgabe Ü47

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *gerade*, wenn $f(x) = f(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, und sie heißt *ungerade*, wenn $f(x) = -f(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Sei f nachfolgend stetig und differenzierbar.

- (a) Zeigen Sie: Die Ableitung einer geraden (bzw. ungeraden) Funktion ist ungerade (bzw. gerade).
- (b) Zeigen Sie: Es gibt mindestens eine Stammfunktion $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ einer geraden (bzw. ungeraden) Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, die ungerade (bzw. gerade) ist.
- (c) Zeigen Sie: Jede Stammfunktion $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ einer ungeraden Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist gerade.
- (d) Geben Sie ein Beispiel einer geraden Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ an, deren Stammfunktion $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ weder gerade noch ungerade ist (mit Beweis/Begründung).
- (e) Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine gerade, $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine ungerade Funktion und $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Beweisen Sie folgende Behauptungen:

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx \quad \text{und} \quad \int_{-a}^a g(x) dx = 0$$

Aufgabe Ü48

Berechnen Sie die Koeffizienten a_k und b_k der Fourierreihe $p(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$ für die 2π -periodische Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) := \begin{cases} x + \frac{\pi}{2} & , \quad -\pi < x < 0 \\ -x + \frac{\pi}{2} & , \quad 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$