

Mathematik IT 3 (Analysis)

für die Studiengänge Informatik, IMT und eBusiness im Wintersemester 2012/2013

Aufgaben für die Übungen vom 30.01. bis 01.02.2013

Aufgabe Ü49

In der Vorlesung wurde die *Trapezregel* gezeigt: Sei $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar, dann gibt es ein $t \in [0, 1]$, so dass

$$\int_0^1 f(x) \, dx = \frac{f(0) + f(1)}{2} - \frac{1}{12} f''(t). \quad (*)$$

- (a) Berechnen Sie die bestimmten Integrale $\int_0^1 x^3 \, dx$ und $\int_0^1 x^4 \, dx$ jeweils exakt und numerisch mit Hilfe der Trapezregel. Überprüfen Sie für die beiden Integrale, für welche $t \in \mathbb{R}$ in (*) Gleichheit gilt.
- (b) Verallgemeinern Sie die Trapezregel auf $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$, so dass $\int_a^b f(x) \, dx$ aus $f(a)$ und $f(b)$ berechnet werden kann. *Hinweis: Substitutionsregel.*
- (c) Berechnen Sie mit der unter (b) entwickelten Verallgemeinerung nun $\int_0^1 x^3 \, dx$ und $\int_0^1 x^4 \, dx$, in dem Sie das Intervall $[0, 1]$ in vier gleichlange Intervalle I_i , $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ zerlegen und auf diesen $\int_{I_i} f(x) \, dx$ durch ein Trapez abschätzen. Was fällt Ihnen auf, wenn Sie mit Ihren Ergebnissen aus Aufgabenteil (a) vergleichen?

Aufgabe Ü50

Bestimmen Sie die Lösung der folgenden Anfangswertaufgaben:

- (a) $y' = xy$ mit $y(\sqrt{2}) = e$
- (b) $y' = -\frac{y}{x}$, $y(2) = 1$
- (c) $y' = \frac{x}{y^2}$, $y(0) = 3$
- (d) $12x^3 + 3x^3y^2 = \frac{y'}{\ln(x^4)}$ mit $y(1) = 2\sqrt{3}$

Aufgabe Ü51 (Modell der Gurtmuffel)

Zur Zeit $t_0 = 0$ wird das Anlegen des Sicherheitsgurtes im Auto zur Pflicht gemacht; die wackeren Bürger kommen jedoch diesem Gesetz nicht sofort nach. Sei $b(t)$ der Bruchteil derjenigen, die das Gesetz zur Zeit $t \geq 0$ befolgen. Man kann annehmen, dass die Anzahl der Gurtbenutzer mit einer Geschwindigkeit wächst, die proportional zur Anzahl der noch vorhandenen Gurtmuffel ist. Formulieren und lösen Sie das entsprechende Anfangswertproblem.