Brandenburgische
Technische Universität
Cottbus

Lehrstuhl Mathematik, insbesondere
Numerische und Angewandte Mathematik
Prof. Dr. L. Cromme

Mathematik IT 3 (Analysis)

für die Studiengänge Informatik, IMT und eBusiness im Wintersemester 2012/2013

Aufgaben für die Übungen vom 06. bis 08.02.2013

Aufgabe Ü52

Lösen Sie die folgenden Anfangswertaufgaben:

(a) $y' = -\frac{y^2}{x}$ mit $y(2) = \frac{1}{\ln(2)}$

(b) $(1+x^3)y' - x^2 y = 0$ mit $y(1) = 2$

(c) $y' = 2y + x$ mit $y(0) = 1$

(d) $y' - y = e^x$ mit $y(0) = 1000$

Aufgabe Ü53

Lösen Sie die Differentialgleichung $y' = \dfrac{y^2 - x^2}{2xy}$, indem Sie diese in die Form $f\left(\frac{y}{x}\right)$ bringen, und skizzieren Sie einige Lösungskurven. (*Hinweis: Differentialgleichungen vom Typ $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ werden Ähnlichkeitsdifferentialgleichungen genannt. Mit dem Ansatz $z(x) := \frac{y(x)}{x}$ erhält man $y = zx$ und $y' = z'x + z$. Die Substitution von y und y' ermöglicht dann die Trennung der Variablen.*)

Aufgabe Ü54

In der Aufgabe Ü52.(c) wurde die Anfangswertaufgabe $y' = 2y + x$ mit $y(0) = 1$ analytisch gelöst. Berechnen Sie numerisch eine Näherung für $y(1)$ auf vier Nachkommastellen genau mit Hilfe des

(a) (klassischen) Euler-Verfahrens sowie mit dem

(b) Heun-Verfahren

auf dem Gitter $\Delta = \left\{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\right\}$. Vergleichen und diskutieren Sie die Ergebnisse hinsichtlich des Approximationsfehlers mit dem exakten Wert $y(1) = 8.48630124\ldots$. Wie kann man den Fehler verkleinern?

Aufgabe Ü55

Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch $f(x,y) = \begin{cases} 25 \cdot \frac{xy}{x^2+y^2} & , \text{ für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \text{ für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ definiert.

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion f im Nullpunkt $(x,y) = (0,0)$ nicht stetig ist.

(b) Berechnen Sie den Gradient von f im Punkt $(x,y), = (2,1)$.