

Mathematik IT 3 (Analysis)

für die Studiengänge Informatik, IMT und eBusiness im Wintersemester 2012/2013

Testklausur am 20. Dezember 2012

Name : _____
 Matrikelnummer : _____
 Studiengang : _____

Aufgabe(n)	1 bis 8	9	10	11	Σ	Note	Zusatzpunkte für die Prüfung
mögliche Punkte	16	11	14	19	60	-	
erreichte Punkte							

Hinweise:

- Die Bearbeitungszeit beträgt **80 Minuten**.
- Als Hilfsmittel sind die **eigenen** Mitschriften aus Vorlesung und Übung, die eigenen Übungsblätter (aus dem Wintersemester 2012/13) mit Lösungen, ein Lehrbuch und eine Formelsammlung erlaubt.
- Die Benutzung von Taschenrechnern, Mobiltelefonen und sonstigen technischen Geräten ist während der Bearbeitungszeit nicht gestattet (und auch nicht erforderlich)! Derartige Geräte sind zudem außer Reichweite zu legen und abzuschalten. Zuwiderhandlungen ziehen eine Bewertung der Klausur mit der Note 5.0 nach sich.
- In jeder der **Aufgaben 1 bis 8** mit ☐-Kästchen **wählen Sie durch Ankreuzen die richtige Antwort** aus. **Mehrere Kreuze pro Aufgabe sind nicht möglich!** In den vorgesehenen Feldern tragen Sie bitte außerdem die entsprechenden Werte ein, falls Sie das entsprechende Kästchen ankreuzen.
- In den **Aufgaben 9 bis 11** muss jede Lösung **klar begründet** und der **Lösungsweg nachvollziehbar** angegeben werden! Ergebnisse aus der Vorlesung bzw. aus den Übungen dürfen mit Verweis ohne Begründung verwendet werden.
- Bitte versehen Sie **alle** Blätter, die Sie beschrieben haben und abgeben möchten, mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.
- Wenn Sie fertig sind, dann bringen Sie Ihre Klausur nicht nach vorn, sondern geben uns Bescheid und wir holen die Klausur ab. Dies gilt insbesondere am Ende der Bearbeitungszeit! Bitte geben Sie die Aufgabenblätter mit ab.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (2 Punkte)

Die Menge $A \subseteq \mathbb{N}$ sei beschränkt und die Menge $B \subseteq \mathbb{R}$ sei abzählbar unendlich. Was läßt sich über die Menge $C := A \cap B$ aussagen?

- ☐ (a) C ist endlich.
- ☐ (b) C ist nicht endlich.
- ☐ (c) Es ist keine Aussage über die Endlichkeit von C möglich.

Aufgabe 2 (2 Punkte)

Gegeben Sei die Menge $M := \{x \in \mathbb{Q} \mid x^3 \geq 8\} \subsetneq \mathbb{R}$. Welche der folgenden Aussagen ist für M richtig?

- ☐ (a) M besitzt das endliche Infimum $\inf(M) = \square$, aber kein Minimum.
- ☐ (b) Es gilt $\min(M) = \inf(M) = \square$.
- ☐ (c) M besitzt das endliche Supremum $\sup(M) = \square$, aber kein Maximum.
- ☐ (d) Es gilt $\max(M) = \sup(M) = \square$.

Aufgabe 3 (2 Punkte)

Es seien $M_1 := \{z \in \mathbb{C} \mid z^2 = -9\}$ und $M_2 := \{z \in \mathbb{C} \mid z^6 = 1\}$.

- ☐ (a) $M_1 = \{-3i, 3i\}$ und $M_2 = \{-1, 1, -i, i, \frac{1}{2}\sqrt{3}i, -\frac{1}{2}\sqrt{3}i\}$
- ☐ (b) $M_1 = \{-3i, 3i\}$ und $M_2 = \{-1, 1, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i, -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i, -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}i, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}i\}$
- ☐ (c) M_1 besteht aus unendlich vielen Elementen und es gilt $|z| = 3$ für alle $z \in M_1$ und M_2 besteht aus unendlich vielen Elementen und es gilt $|z| = 1$ für alle $z \in M_2$

Aufgabe 4 (2 Punkte)

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge mit $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$. Welche Aussage ist für die Folge $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $c_n := a_n \cdot b_n$ möglich?

- ☐ (a) Die Folge $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist monoton fallend und deshalb gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$.
- ☐ (b) Die Folge $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist monoton wachsend und deshalb gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \infty$.
- ☐ (c) Die Folge $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist konstant, d.h. $c_n = c \in \mathbb{R}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und deshalb gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = c$.
- ☐ (d) Es ist keine Aussage über die Monotonie und Konvergenz der Folge $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ möglich.

Aufgabe 5 (2 Punkte)

Für die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gilt $\sqrt[n]{|a_n|} + \frac{1}{4} < \frac{3}{4}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Was läßt sich über die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ aussagen?

- ☐ (a) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist divergent.
- ☐ (b) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist konvergent.
- ☐ (c) Es ist keine Aussage über die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ möglich.

Aufgabe 6 (2 Punkte)

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ und $0 < \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

- ☐ (a) Mit dem Leibnizkriterium folgt, dass $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} a_n$ konvergiert.
- ☐ (b) Mit dem Leibnizkriterium folgt, dass $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} a_n$ absolut konvergiert.
- ☐ (c) Mit dem Quotientenkriterium folgt $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} a_n = 0$.
- ☐ (d) Mit dem Quotientenkriterium folgt, dass $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} a_n$ divergiert.

Aufgabe 7 (2 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine gerade Funktion, d.h. es gilt $f(x) = f(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, und $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine ungerade Funktion, d.h. es gilt $g(x) = -g(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

- ☐ (a) Die Funktion $h(x) := f(g(x)) + (g(x))^2 + f(x)$ ist eine gerade Funktion.
- ☐ (b) Die Funktion $h(x) := f(g(x)) + (g(x))^2 + f(x)$ ist eine ungerade Funktion.
- ☐ (c) Die Funktion $h(x) := f(g(x)) + (g(x))^2 + f(x)$ ist weder eine gerade, noch eine ungerade Funktion.

Aufgabe 8 (2 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine überall in $\mathbb{R}$ stetige Funktion. Die Funktion $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei in $a \in \mathbb{R}$ unstetig, in $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ stetig und es gelte $-\infty < f(a) := \lim_{x \uparrow a} g(x) < \infty$ sowie $-\infty < \lim_{x \downarrow a} g(x) < \infty$.

- ☐ (a) Die Funktion $h(x) := f(g(x))$ ist stetig für alle $x \in \mathbb{R}$.
- ☐ (b) Die Funktion $h(x) := f(g(x))$ ist unstetig in $a \in \mathbb{R}$.
- ☐ (c) Es ist keine Aussage zur Stetigkeit der Funktion $h(x) := f(g(x))$ in $a \in \mathbb{R}$ möglich.

Aufgabe 9 (11 Punkte)

- (a) Weisen Sie nach, dass $8^n > n^2$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.
- (b) Gegeben sei die Menge $M := \left\{ x \in [-\pi, \pi] \cap \mathbb{Q} \mid \cos(x) \geq \frac{1}{2} \right\}$. Prüfen Sie M auf die Existenz von Infimum, Supremum, Minimum und Maximum in $\mathbb{R}$. Geben Sie diese im Fall der Existenz an.
(Hinweis: Es gilt $\cos(0) = 1$, $\cos(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$ und $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$.)
- (c) Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Ungleichung $|x + 2| \cdot |x - 2| > 3$.
- (d) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, die die Ungleichung $-\frac{1}{2} \leq \ln(x^2) \leq 2$ erfüllen.

Aufgabe 10 (15 Punkte)

- (a) Berechnen Sie den Grenzwert der Folge
- $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$
- mit

$$a_n := \frac{5n^7 - 55n^5 + 555n^3 - 5555n + 55555}{1 - 55n^2 - 555n^3 - 5555n^4 - 5555n^5 - 555n^6 - 55n^7} + \frac{n^2}{(n+1)^2} \cdot \frac{n^5 + n^7 + 2n^9}{n + n^5 + 3n^9}$$

- (b) Berechnen Sie den Grenzwert der Reihe
- $\sum_{n=2}^{\infty} \left(-\frac{5}{7}\right)^n$

- (c) Warum ist die Reihe
- $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5n^2 - 3n + 100}{4n^2 - 2n + 2000000}$
- nicht konvergent?

- (d) Ist die Reihe
- $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2n + n^3}{3 - 4n^3}\right)^n$
- konvergent bzw. absolut konvergent?

- (e) Bestimmen Sie alle Häufungspunkte der Folge
- $(a_n)_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$
- mit
- $a_n := (-1)^n \cdot \sqrt{\frac{n+1}{n}} + 3n - 9 \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$

- (f) Ist die komplexe Folge
- $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$
- mit
- $c_n := i + \frac{2+i}{1-ni}$
- konvergent?

Aufgabe 11 (19 Punkte)

- (a) Weisen Sie mit Hilfe des Folgenkriteriums der Stetigkeit nach, dass die Funktion
- $f(x) := \frac{x}{x^2 - 1}$
- in
- $x_0 := 2$
- stetig ist. Begründen Sie Ihre einzelnen Rechenschritte!

- (b) Gegeben sei die Funktion

$$f(x) := \begin{cases} \sqrt{x^2 + 5} & , \quad x < 2 \\ x^2 - 1 & , \quad x > 2 \\ c & , \quad x = 2 \end{cases}.$$

Kann die Konstante $c \in \mathbb{R}$ in der Funktionsdefinition so gewählt werden, damit f in $x = 2$ stetig ist?

- (c) Weisen Sie mit Hilfe des Folgenkriteriums der Stetigkeit nach, dass die Funktion
- $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$
- mit

$$f(x) := \begin{cases} 3 - \frac{1}{x^3} & , \quad x < 0 \\ 2 - \frac{1}{x^2} & , \quad x > 0 \end{cases}.$$

in $x_0 = 0$ nicht stetig ergänzbar ist.

- (d) Weisen Sie mit Hilfe der
- $\varepsilon - \delta$
- Definition der Stetigkeit nach, dass die Funktion
- $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
- mit

$$f(x) := \begin{cases} 2x - \cos^2(x) + \frac{3}{2} & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}.$$

in $x_0 = 0$ nicht stetig ist.

- (e) Weisen Sie nach, dass $f : \mathbb{R} \rightarrow D$ mit $f(x) := \exp(3x + 9) + \frac{1}{2}$ umkehrbar ist und berechnen Sie die Umkehrfunktion $f^{-1} : D \rightarrow \mathbb{R}$. Geben Sie den Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}$ der Umkehrfunktion f^{-1} an.
- (f) Beweisen oder widerlegen Sie die folgende Aussage: Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ sei stetig mit $f(x) \in \mathbb{Z}$ für alle $x \in I$. Dann ist f konstant, d.h. $f(x) = c \in \mathbb{Z}$ für alle $x \in I$.