

Mathematik IT 3 (Analysis)

für die Studiengänge Informatik, IMT und eBusiness im Wintersemester 2013/2014

Geben Sie Ihren Namen, Matr.-Nr., Übungsgruppe auf Ihrer Lösung an und heften Sie alle Blätter zusammen!

Übungsblatt 2 - Abgabe bis Dienstag, 22.10.2013, 12:00 Uhr im Postfach 32 im HG

Aufgabe 2.1 (18 Punkte)

Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, die nachfolgende Ungleichungen erfüllen. Veranschaulichen Sie die Ungleichungen und ihre Lösungsmengen durch geeignete Skizzen. Untersuchen Sie außerdem die Lösungsmengen auf die Existenz von Infimum, Supremum, Minimum und Maximum und geben Sie diese Werte im Fall ihrer Existenz an.

(a) $-4x^2 + 2x + 16 \geq -2x^2 - 2x$

(b) $2 - |x| > \frac{x^2}{2}$

(c) $\frac{|x-2|}{x+4} < x$

Aufgabe 2.2 (6 Punkte)

- (a) Beweisen Sie mit Hilfe des Binomischen Lehrsatzes: Für jede reelle Zahl $x \geq 0$ und für jede natürliche Zahl $n \geq 2$ gilt

$$(1+x)^n \geq \frac{n^2}{4}x^2$$

- (b) Zeigen Sie, dass zu jeder reellen Zahl $a > 1$ eine natürliche Zahl n_0 existiert, so dass $a^n > n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ gilt.

Aufgabe 2.3 (10 Punkte)

- (a) Bestimmen Sie eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, deren erste Glieder nachfolgend angegeben sind:

(i) $\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{2}{5}, \frac{\sqrt{5}}{6}, \dots$

(ii) $1, 0, 1, 0, 1, \dots$

(iii) $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{24}, \frac{1}{120}, \dots$

(iv) $-1, -3, -7, -15, -31, \dots$

(v) $0.2, 0.22, 0.222, 0.2222, \dots$

- (b) Untersuchen Sie die Monotonie der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{n+1}{n!}$.

- (c) Untersuchen Sie die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_1 = \frac{1}{4}$ und $a_{n+1} = a_n^2 + \frac{1}{4}$ für $n \geq 1$ auf Monotonie und Beschränktheit.

(Hinweis: Es genügt bei (b) und (c) ausdrücklich nicht, ein paar Folgenglieder auszurechnen!)

Aufgabe 2.4 (7 Punkte)

- (a) Zeigen Sie, dass die Menge A aller reellen Zahlenfolgen ein $\mathbb{R}$ -Vektorraum ist, wobei Addition und Multiplikation komponentenweise definiert sind.
- (b) Weisen Sie nach, dass die Menge B aller beschränkten reellen Zahlenfolgen ein Vektorraum ist.