

Mathematik IT 3 (Analysis)

für die Studiengänge Informatik, IMT und eBusiness im Wintersemester 2013/2014

Geben Sie Ihren Namen, Matr.-Nr., Übungsgruppe auf Ihrer Lösung an und heften Sie alle Blätter zusammen!

Übungsblatt 3 - Abgabe bis Dienstag, 29.10.2013, 12:00 Uhr im Postfach 32 im HG

Aufgabe 3.1 (12 Punkte)

- (a) Bestimmen Sie Infimum und Supremum der Menge $A := \left\{ \frac{(-1)^{n+1}}{n+2} + 3 \mid n \in \mathbb{N} \right\}$.
- (b) Diskutieren Sie für die Mengen $B := \{x \in \mathbb{Q} \mid 105 \leq x^2 - 16 < 196\}$ und $C := B \cap [0, \infty)$ die Existenz von Infimum, Supremum, Minimum und Maximum im Körper $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen.
- (c) Seien A und B zwei nichtleere Mengen. Welches Infimum hat die Menge

$$A + B = \{x_1 + x_2 \mid x_1 \in A, x_2 \in B\} ?$$

Beweisen Sie Ihre Behauptung!

(Hinweis zu (c): Weisen Sie insbesondere nach, dass es keine größere untere Schranke für $A + B$ als $\inf(A + B)$ gibt.)

Aufgabe 3.2 (9 Punkte)

- (a) Zeigen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n := \frac{n^2 - 1}{(n+1)!}$ streng monoton fallend ist.
- (b) Untersuchen Sie die Monotonie der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ mit

$$a_n := \begin{cases} \frac{5}{(n-1)^2} & , \quad n \in \{2k \mid k \in \mathbb{N}_0\} \\ \frac{2}{(n+1)^2} & , \quad n \in \{2k+1 \mid k \in \mathbb{N}_0\} \end{cases}.$$

- (c) Weisen Sie nach, dass die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n := (-1)^n \cdot \frac{n+1}{2n+1}$ beschränkt ist, und geben Sie eine Schranke für die Folge an. Geben Sie außerdem Infimum und Supremum der Menge $Z = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ an.

(Hinweis: Es genügt in allen Teilaufgaben ausdrücklich nicht, ein paar Folgenglieder auszurechnen!)

Aufgabe 3.3 (11 Punkte)

Zeigen Sie mit Hilfe der $\varepsilon - n_0$ -Definition der Konvergenz einer reellen Zahlenfolge die folgenden Behauptungen:

- (a) Die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n := \frac{n^2 + 3n + 3}{n^2 + 2n - 1}$ hat den Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$.
- (b) Die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n := \frac{n!}{2n^2}$ hat den Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.
- (c) Die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n := (1 - (-1)^n) \cdot \frac{1}{n} - \frac{n^2 - 1}{n^3 + n + 2}$ hat den Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

(Hinweis zu (b): Zeigen Sie zunächst, dass $(n+1)! < 2^{n^2}$ für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ gilt.)

Aufgabe 3.4 (4 Punkte)

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge. Zeigen Sie, dass $(a_n \cdot b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dann ebenfalls eine Nullfolge ist. Kann auf die Voraussetzung „ $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist beschränkt“ verzichtet werden? Begründen Sie Ihre Antwort (Beweis oder Gegenbeispiel)!