

Mathematik IT 3 (Analysis)

für die Studiengänge Informatik, IMT und eBusiness im Wintersemester 2013/2014

Geben Sie Ihren Namen, Matr.-Nr., Übungsgruppe auf Ihrer Lösung an und heften Sie alle Blätter zusammen!

Übungsblatt 4 - Abgabe bis Dienstag, 05.11.2013, 12:00 Uhr im Postfach 32 im HG

Hinweis: Wegen des Feiertages am Donnerstag, den 31. Oktober 2013 finden natürlich für die Gruppen 2 und 3 an diesem Tag keine Übungen statt. Als Ersatztermin wird für die betreffenden Studentinnen/Studenten eine Zusatzübung am Montag, den 28. Oktober 2013 von 7:30 Uhr bis 9:00 Uhr im Seminarraum 1 angeboten.

Aufgabe 4.1 (17 Punkte)

Untersuchen Sie die Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit den angegebenen Gliedern auf Konvergenz bzw. Divergenz und bestimmen Sie im Fall der Konvergenz den Grenzwert:

- (a) $a_n := \frac{2n^3 - 5n^2 + 7}{8n^3 + 3n - 13}$
- (b) $a_n := \frac{3n^8 + 7n^6 - 7n}{5n^8 + n - 1} \cdot \frac{1 - n^2}{2n^2 + 1} + \frac{n^3 + (-1)^n n^2}{2n^3 + 2n^2 - 3}$
- (c) $a_n := \frac{3^n - 2n - 1}{5^n + n^5 + n} + \frac{3n^2 + 2n + 1}{1 - n - 7n^2}$
- (d) $a_n := \frac{\sqrt{n^5} + 7n^2 + 4}{n^2 + n + 1}$
- (e) $a_n := n + 1 - \frac{(n-1)^2}{n+1}$
- (f) $a_n := \frac{n}{n+1} + (-1)^n$
- (g) $a_n := \sqrt{n^4 + 1} - n^2$
- (h) $a_n := \frac{4^{2n}}{3^{4n}}$
- (i) $a_n := \sqrt{2n - \sqrt{n}} - \sqrt{n - 2\sqrt{n}}$
- (j) $a_n := \frac{(n+1)!}{\sqrt{n} + 1}$

Aufgabe 4.2 (5 Punkte)

Geben Sie jeweils ein Beispiel zwei verschiedenener Folgen reeller Zahlen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bzw. $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ an, so dass (falls möglich) die folgenden Fälle eintreten:

- (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = c$, wobei $-\infty < c < \infty$ beliebig ist.
- (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$
- (c) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sind divergent und $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = c$, wobei $-\infty < c < \infty$ beliebig ist
- (d) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = c$, wobei $-\infty < c < \infty$ beliebig ist, aber weder $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ noch $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ sind endlich
- (e) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ existieren, aber $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n)$ existiert nicht

(Aufgaben 4.3 und 4.4 - siehe Seite 2)

Aufgabe 4.3 (5 Punkte)

(Prüfungsaufgabe Mathematik IT-3, BTU Cottbus WS 2012/13)

Ein Fass mit einem maximalem Fassungsvermögen von 100 Liter enthält 20 Liter Wasser und ist porös. Eine Sisyphusarbeit: Karl-Otto rennt mit einem Eimer hin und her und schüttet in Abständen von einer Minute 5 Liter in den Behälter. Leider sickert umso mehr Wasser durch die Löcher, je weiter das Fass bereits gefüllt ist. Während Karl-Otto hin und her läuft verliert das Fass wieder 10% seines eben noch vorhandenen Inhalts.

- (a) Formulieren Sie die Füllmenge des Fasses als rekursive Folge.
- (b) Untersuchen Sie die Existenz eines Grenzwertes?
- (c) Wird das Fass jemals voll? Falls nicht, wo liegt seine Grenze?

Aufgabe 4.4 (7 Punkte)

Beweisen Sie die Divergenz der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n := \frac{n^2}{n+1}$ auf verschiedenen Wegen:

- (a) mit Hilfe der $\varepsilon - n_0$ -Definiton der Konvergenz einer reellen Zahlenfolge
- (b) mit Hilfe des Cauchy-Kriteriums der Konvergenz einer reellen Zahlenfolge

(Hinweis: Alle „Rechenwege“ müssen begründet werden!)