Brandenburgische
Technische Universität
Cottbus - Senftenberg

Lehrstuhl Mathematik, insbesondere
Numerische und Angewandte Mathematik
Prof. Dr. L. Cromme

Mathematik IT 3 (Analysis)

für die Studiengänge Informatik, IMT und eBusiness im Wintersemester 2013/2014

Geben Sie Ihren Namen, Matr.-Nr., Übungsgruppe auf Ihrer Lösung an und heften Sie alle Blätter zusammen!

Übungsblatt 5 - Abgabe bis Dienstag, 12.11.2013, 12:00 Uhr im Postfach 32 im HG

Aufgabe 5.1 (13 Punkte)
Nach Definition aus der Vorlesung heißt a Häufungspunkt einer Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wenn es eine Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gibt, die gegen a konvergiert. In der Literatur wird auch der Begriff des Häufungswertes verwendet. Untersuchen Sie die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf die Existenz von Häufungspunkten. Geben Sie falls möglich alle Häufungspunkte an.

(a) $a_n := (-1)^n \cdot \dfrac{3n^2+2n+1}{2-5n^2}$

(b) $a_n := \left(6n + 36\left\lfloor -\dfrac{n}{6}\right\rfloor\right) + \dfrac{5n^3-1}{8-7n^3}$

(c) $a_n := b_n \cdot c_n \quad$ mit $\quad b_n := \left(\dfrac{(-2)^n+3}{2^{n+3}}\right) \quad$ und $\quad c_0 = 4,\ c_1 = 5,\ c_{n+2} = \dfrac{(-1)^{n+1}c_{n+1}}{\max(c_n, c_{n+1})},\ n \in \mathbb{N}_0$

Aufgabe 5.2 (8 Punkte)
Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge, die gegen ein $a \in \mathbb{R}$ konvergiere. Zeigen Sie, dass die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch

$$b_n := \frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n} a_i$$

ebenfalls gegen a konvergiert. (*Hinweis: Betrachten Sie zunächst den Spezialfall* $a = 0$.)

Aufgabe 5.3 (8 Punkte)
Eine Schnecke sitzt an einem Ende eines 100 Meter langen Gummibandes. Am anderen Ende des Gummibandes befindet sich ein Kohlkopf, den die Schnecke fressen möchte. Man kann sich sicher vorstellen, dass der Schnecke mehrere Wasserfälle im Munde zusammenlaufen, wenn sie den Kohlkopf in der Ferne sieht. So kriecht sie los, beeilt sich nach Leibeskräften und kriecht jeden Tag einen Meter in Richtung des Kohlkopfs. Wir wollen annehmen, dass das Gummiband sich unendlich dehnen läßt, dass die Schnecke unsterblich ist und das der Kohlkopf ewig frisch bleibt. Denn nachts, wenn die Schnecke schläft, kommt ein Bösewicht und dehnt das Gummiband gleichmäßig um 100 Meter. Wird die Schnecke den Kohlkopf jemals erreichen oder wird sie ewig weiterkriechen? (*Hinweis: Drücken Sie zunächst den zurückgelegten Weg am n-ten Tag durch eine rekursiv definierte Folge aus. Rechnen Sie diesen anschließend in den Prozentsatz des Gesamtweges am n-ten Tag um.*)

Aufgabe 5.4 (8 Punkte)
Berechnen Sie den Grenzwert der folgenden Reihen:

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{5}{9}\right)^n$

(b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{3^{k+2}-2}{6^k}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\min\left(\tfrac{3}{5}, \left(\tfrac{3}{4}\right)^n\right)$