

Mathematik IT 3 (Analysis)

für die Studiengänge Informatik, IMT und eBusiness im Wintersemester 2013/2014

Geben Sie Ihren Namen, Matr.-Nr., Übungsgruppe auf Ihrer Lösung an und heften Sie alle Blätter zusammen!

Übungsblatt 6 - Abgabe bis Dienstag, 19.11.2013, 12:00 Uhr im Postfach 32 im HG

Aufgabe 6.1 (15 Punkte)

- (a) Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 + 8}{(n^2)!}$ konvergiert.
- (b) Ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3n^2 + 1}{5n^2 - 8n} \right)^n$ konvergent?
- (c) Untersuchen Sie mit dem Leibnizkriterium, ob die Reihe $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+1)}{(n-1)^2}$ konvergiert.
- (d) Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+4}{n^2 + 4n + 4}$ divergiert.
- (e) Berechnen Sie den Grenzwert der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(5n-1)(5n+4)}$ mit Hilfe einer Partialbruchzerlegung der Reihenglieder. Ist mit Hilfe des Quotientenkriteriums eine Aussage zur Konvergenz möglich?

Aufgabe 6.2 (6 Punkte)

Die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sei definiert durch $a_n := \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^3 + k}$. Zeigen Sie: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{3}$.

(Hinweis: Weisen Sie $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ nach und wenden Sie die „Sandwichregel“ an.)

Aufgabe 6.3 (4 Punkte)

(Prüfungsaufgabe Mathematik IT-3, BTU Cottbus WS 2012/13)

Sei (a_n) eine beliebige Zahlenfolge mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Zeigen Sie: Wenn die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nach dem Quotientenkriterium absolut konvergiert, dann konvergiert auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n)^2$. Ist auch die Umkehrung dieser Aussage richtig? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 6.4 (5 Punkte)

- (a) Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine absolut konvergente Reihe und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Folge reeller Zahlen. Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n b_n)$ absolut konvergiert.

- (b) Sei $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Folge reeller Zahlen. Konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n b_n)$ auch, wenn die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nur konvergent ist? Begründen Sie Ihre Antwort!