

Mathematik IT 3 (Analysis)

für die Studiengänge Informatik, IMT und eBusiness im Wintersemester 2013/2014

Geben Sie Ihren Namen, Matr.-Nr., Übungsgruppe auf Ihrer Lösung an und heften Sie alle Blätter zusammen!

Übungsblatt 7 - Abgabe bis Dienstag, 26.11.2013, 12:00 Uhr im Postfach 32 im HG

Aufgabe 7.1 (16 Punkte)

(a) Berechnen Sie den Grenzwert der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n - (-1)^n 3^{n+1}}{7^n}$

(b) Ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 + 2}{2(n^2)! + 3}$ absolut konvergent?

(c) Untersuchen Sie die Reihe $\sum_{n=1001}^{\infty} \frac{n^{999}}{18^n}$ auf Konvergenz.

(d) Ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ mit

$$a_n := \begin{cases} \frac{5}{(n-1)^2} & , \quad n \in \{2k \mid k \in \mathbb{N}_0\} \\ \frac{2}{(n+1)^2} & , \quad n \in \{2k+1 \mid k \in \mathbb{N}_0\} \end{cases}$$

konvergent? Warum ist hier das Leibniz-Kriterium für alternierende Reihen nicht anwendbar?

(e) Untersuchen Sie mit dem Leibnizkriterium die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{(-2)^n}$ auf Konvergenz.

(Hinweis zu (d): Es gilt $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.; Hinweis zu (e): Weisen Sie zuerst $n^3 < 2^n$ für alle $n \geq 10$ nach.)

Aufgabe 7.2 (11 Punkte)

(Matheprüfung E-Technik, TU Dresden 2012)

Untersuchen Sie, ob die Reihe $S := \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left[1 + \frac{1}{n} \right]^n - 2 \right)^n$ konvergiert. Gehen Sie dazu in folgenden Teilschritten vor:

(a) Weisen Sie nach, dass $\binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \leq \frac{1}{k!}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt.

(b) Verifizieren Sie die Gültigkeit der Ungleichung $2^n < n!$ für alle $n \geq 4$.

(c) Weisen Sie mit Hilfe von (a) und (b) nach, dass $2 \leq \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \leq \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} < \frac{28}{10}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

(d) Entscheiden Sie, ob die Reihe S konvergiert (mit Begründung).

Aufgabe 7.3 (6 Punkte)

(a) Untersuchen Sie, ob die Folge $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $c_n := \frac{n+2+5in^3}{n+1+2in^3} \in \mathbb{C}$ konvergiert. Geben Sie im Fall der Konvergenz den Grenzwert an.

(b) Bestimmen Sie alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung $(2-3i)z + (2+3i)\bar{z} - 12 = 0$, und skizzieren Sie die Lösungsmenge in der Gaußschen Zahlenebene.