

# Mathematik IT 3 (Analysis)

für die Studiengänge Informatik, IMT und eBusiness im Wintersemester 2013/2014

Geben Sie Ihren Namen, Matr.-Nr., Übungsgruppe auf Ihrer Lösung an und heften Sie alle Blätter zusammen!

## Übungsblatt 8 - Abgabe bis Dienstag, 03.12.2013, 12:00 Uhr im Postfach 32 im HG

### Aufgabe 8.1 (6 Punkte)

- (a) Entwickeln Sie  $x = \frac{6}{7}$  in einen Dezimalbruch.
- (b) Zu jeder reellen Zahl  $x$  mit  $0 < x < 1$  gibt es eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , so dass  $x$  in einen  $b$ -adischen Bruch  $x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k b^{-k}$  entwickelt werden kann. Entwickeln Sie  $x = \frac{6}{7}$  in einen  $b$ -adischen Bruch für  $b = 2$  und  $b = 3$ .  
(Hinweis: Eine reelle Zahl  $x$  mit  $0 < x < 1$  kann wie folgt in einen  $b$ -adischen Bruch entwickelt werden: Setze  $y_1 := x \cdot b$  und für  $k \geq 2$  jeweils  $y_k := (y_{k-1} - a_{k-1})b$  sowie  $a_k := \lfloor y_k \rfloor$  für  $k \geq 1$ .)

### Aufgabe 8.2 (6 Punkte)

- (a) Untersuchen Sie die komplexwertige Folge  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $c_n := \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}i\right)^n$  auf die Existenz von Häufungspunkten. Falls die Folge Häufungspunkte besitzt, dann geben Sie diese an.
- (b) Beweisen oder widerlegen Sie folgende Behauptung: Seien  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $a_n \in \mathbb{C}$  und  $b_n \in \mathbb{C}$  zwei Folgen mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = c \in \mathbb{C}$ . Weiter sei  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $c_n \in \mathbb{C}$  eine Folge, für die ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  existiert, so dass  $|a_n| \leq |c_n| \leq |b_n|$  für alle  $n \geq n_0$  gilt. Dann folgt  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = c$ .

### Aufgabe 8.3 (14 Punkte)

Weisen Sie mit Hilfe des  $\varepsilon - \delta$ -Kriteriums der Stetigkeit die folgenden Aussagen nach:

- (a) Die Funktion  $f(x) = \frac{1}{x}$  ist stetig in  $x_0 = -2$ .
- (b) Die Funktion  $f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2-8}{x-2} & \text{für } x \neq 2 \\ 8 & \text{für } x = 2 \end{cases}$  ist stetig in  $x_0 = 2$ .
- (c) Die Funktion  $f(x) = (x+1) \cdot \cos\left(\frac{3-x}{x+1}\right)$  ist in  $x_0 = -1$  stetig ergänzbar.
- (d) Die Funktion  $f(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \in \mathbb{Z} \\ 1 & , \quad (-\infty, 0) \setminus \mathbb{Z} \\ -1 & , \quad (0, \infty) \setminus \mathbb{Z} \end{cases}$  ist stetig für alle  $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$  und unstetig für alle  $x \in \mathbb{Z}$ .

(Hinweis zu (d): Fallunterscheidung  $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$  und  $x_0 \in \mathbb{Z}$ )

(Aufgabe 8.4 - siehe Seite 2)

**Aufgabe 8.4** (10 Punkte)

Beweisen Sie mit Hilfe der Definition des Funktionsgrenzwertes die folgenden Behauptungen:

(a)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x \in [1, 2] \\ 0 & , \quad \text{sonst} \end{cases}$  ist unstetig in  $x = 1$  und  $x = 2$ .

(b)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = \frac{\exp(x)}{1-x^2}$  ist stetig in  $x_0 = 0$  und unstetig in  $x_0 = 1$ .

(c)  $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f(x) := \begin{cases} 0 & , \quad x < \sqrt{2} \\ 1 & , \quad x > \sqrt{2} \end{cases}$$

ist auf ganz  $\mathbb{Q}$  stetig.

(Hinweis zu (b): Die Stetigkeit der Exponentialfunktion darf verwendet werden.; Hinweis zu (c): Verwenden Sie die  $\varepsilon - n_0$ -Definition der Konvergenz für eine beliebige Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$  mit  $x, x_n \in \mathbb{Q}$ , wobei Sie diese speziell für  $\varepsilon := |x - \sqrt{2}|$  betrachten.)