

Mathematik IT 3 (Analysis)

für die Studiengänge Informatik, IMT und eBusiness im Wintersemester 2013/2014

Geben Sie Ihren Namen, Matr.-Nr., Übungsgruppe auf Ihrer Lösung an und heften Sie alle Blätter zusammen!

Übungsblatt 9 - Abgabe bis Dienstag, 10.12.2013, 12:00 Uhr im Postfach 32 im HG

Aufgabe 9.1 (18 Punkte)

Bestimmen Sie den Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}$ der folgenden Funktionen und untersuchen Sie, ob die Funktionen auf ganz D stetig sind. Falls dabei eine Funktion in einem oder mehreren Punkten $x_0 \in \mathbb{R}$ nicht definiert sein sollte, dann überprüfen Sie, ob f in x_0 stetig ergänzbar ist.

(a) $f(x) := \frac{\sqrt{x^2 + x - 2}}{x + 3}$

(b) $f(x) := \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$

(c) $f(x) := \begin{cases} x^2 + 2x - 2 & , \quad x \leq -3 \\ \frac{1}{\frac{x+4}{|x-4|}} & , \quad -3 < x \leq -1 \\ \frac{1}{x+2} & , \quad x > -1 \end{cases}$

(d) $f(x) := \sin\left(\frac{1}{x - \pi}\right)$

(e) $f(x) := \frac{2 - \sqrt{3 + 5x}}{5x - 1}$

Aufgabe 9.2 (6 Punkte)

Geben Sie jeweils ein Beispiel an, so dass

- (a) die Summe $f + g$,
- (b) das Produkt $f \cdot g$ bzw.
- (c) die Verkettung $f \circ g$

zweier *unstetiger* Funktionen $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig ist.

Aufgabe 9.3 (9 Punkte)

- (a) Sei c eine komplexe Zahl ungleich Null. Beweisen Sie, dass die Gleichung $z^2 = c$ genau zwei Lösungen besitzt, und dass für eine der beiden Lösungen gilt

$$\operatorname{re}(z) = \sqrt{\frac{|c| + \operatorname{re}(c)}{2}} \quad \text{und} \quad \operatorname{im}(z) = \sigma \sqrt{\frac{|c| - \operatorname{re}(c)}{2}},$$

wobei

$$\sigma := \begin{cases} 1 & , \quad \text{falls } \operatorname{im}(c) \geq 0 \\ -1 & , \quad \text{falls } \operatorname{im}(c) < 0 \end{cases}$$

Die andere Lösung ist das Negative davon.

- (b) Bestimmen Sie die Lösungen der komplexen Gleichungen $z^2 = \frac{8i - 4}{2 + i}$ und $z^2 + 1024 = 0$.

(Hinweis zu (a): Gehen Sie von dem Ansatz $c = \lambda^2$, $\lambda \in \mathbb{C}$ aus. Konstruieren Sie $\lambda \in \mathbb{C}$ geeignet.)