

Mathematik IT 3 (Analysis)

für die Studiengänge Informatik, IMT und eBusiness im Wintersemester 2013/2014

Geben Sie Ihren Namen, Matr.-Nr., Übungsgruppe auf Ihrer Lösung an und heften Sie alle Blätter zusammen!

Übungsblatt 10 - Abgabe bis Dienstag, 17.12.2013, 12:00 Uhr im Postfach 32 im HG

Aufgabe 10.1 (4 Punkte)

- (a) Zeigen Sie mit Hilfe des $\varepsilon - \delta$ -Kriteriums der Stetigkeit, dass die Funktion $f(x) = \sqrt{x-1}$ an der Stelle $x_0 = 2$ stetig ist.
- (b) Untersuchen Sie mit dem Folgenkriterium der Stetigkeit, ob $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \begin{cases} \frac{x-|x^3|}{\sqrt{x}} & \text{für } x \neq 0 \\ 2 & \text{für } x = 0 \end{cases}$ in $x_0 = 0$ stetig ist.

Aufgabe 10.2 (5 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Gleichung $\frac{1}{1+x^2} = \sqrt{x}$ genau eine Lösung besitzt.

(Hinweise: Zwischenwertsatz; insbesondere soll die Lösung der Gleichung nicht berechnet werden.)

Aufgabe 10.3 (6 Punkte)

Elli und Paul starten am Samstag um 6 Uhr zu einer Wanderung. Ziel ist es, eine hoch in den Bergen gelegene Hütte zu erreichen, wobei zu vorab festgelegten Zeiten kleinere Pausen eingelegt werden. Trotz dieser Pausen haben sie bereits um 12 Uhr ihr Ziel erreicht und stärken sich in der Hütte mit einer wohlverdienten Suppe. Am Morgen des darauffolgenden Sonntags beginnen Elli und Paul den Abstieg ins Tal, wobei sie den gleichen Weg wählen, auf dem sie schon den Aufstieg bewältigt haben. Abmarsch an der Berghütte ist um 6 Uhr. Während einer der notwendigen Pausen kommt die Frage auf, ob es wohl einen Ort auf dem Weg gibt, den sie am Tag zuvor zum gleichen Zeitpunkt passiert haben. Welche Antwort gibt es auf diese Frage (mit Begründung)?

Aufgabe 10.4 (6 Punkte)

Berechnen Sie die erste Ableitung von $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ in allen Punkten $x \in D \subseteq \mathbb{R}$:

- (a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = (2x^3 - \sin(x)) \cdot (\cos(x) + 1) + \sin^2(x)$
- (b) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \exp(x^2 + 5x \sin(2x))$
- (c) $f : (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{\cos(\pi e^x)}{x^2 - 1}$

(Aufgabe 10.5 - siehe Seite 2)

Aufgabe 10.5 (11 Punkte)

- (a) Die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei durch $f(x) := \begin{cases} 2x^2 + x + 1 & \text{für } x < 0 \\ \exp(x) & \text{für } 0 \leq x \leq 2 \\ \exp(4 - x) & \text{für } x > 2 \end{cases}$ definiert. Untersuchen Sie die Funktion f an den Stellen $x_1 = 0$ und $x_2 = 2$ auf Stetigkeit. Ist die Funktion an den Stellen $x_1 = 0$ und $x_2 = 2$ differenzierbar? Geben Sie die Ableitung für alle $x \in \mathbb{R}$ an, in denen f differenzierbar ist.

- (b) Bestimmen Sie die Konstanten $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}$ so, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x + a & , \quad x < 1 \\ -5 & , \quad x = 1 \\ b \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) - 5 & , \quad x > 1 \end{cases}$$

an der Stelle $x = 1$ stetig und differenzierbar ist. Berechnen Sie bzgl. der so bestimmten Konstanten a und b den Wert der Ableitung von f an der Stelle $x = 1$.