

Mathematik IT 3 (Analysis)

für die Studiengänge Informatik, IMT und eBusiness im Wintersemester 2013/2014

Geben Sie Ihren Namen, Matr.-Nr., Übungsgruppe auf Ihrer Lösung an und heften Sie alle Blätter zusammen!

Übungsblatt 11 - Abgabe bis Dienstag, 07.01.2014, 12:00 Uhr im Postfach 32 im HG

Aufgabe 11.1 (10 Punkte)

Gegeben sei die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) := \frac{x^2 - x - 1}{\exp(x)}.$$

Führen Sie für f eine Kurvendiskussion mit folgendem Inhalt durch: Nullstellen, Wendepunkte, Koordinaten der lokalen Extrempunkte, Art der lokalen Extrema und Monotoniebereiche.

Aufgabe 11.2 (5 Punkte)

In Aufgabe 10.5.(a) wurde die Funktion $f(x) := \begin{cases} 2x^2 + x + 1 & \text{für } x < 0 \\ \exp(x) & \text{für } 0 \leq x \leq 2 \\ \exp(4 - x) & \text{für } x > 2 \end{cases}$ auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit untersucht. Weisen Sie nach, dass die Funktion f zwei lokale Extremwerte besitzt und geben Sie die Art und die Koordinaten der lokalen Extremwerte an.

Aufgabe 11.3 (22 Punkte)

- (a) Bestimmen Sie mit der Regel von l'Hospital den Grenzwert $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{\sin\left(\frac{\pi}{4}x\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}}$.
- (b) Berechnen Sie $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \arctan(x))^{\frac{1}{x}}$ mit der Regel von l'Hospital.
- (c) Untersuchen Sie das Verhalten der Funktion $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = 4 \cdot \frac{2x + 4}{x^2}$ im Unendlichen.
- (d) Bestimmen Sie den Definitionsbereich der Funktion

$$f(x) := \begin{cases} \frac{(x+1)(x-2)^2}{x^3 - 3x - 2} & \text{für } x \leq 3 \\ \frac{e^{x-3} - 1}{4x - 12} & \text{für } x > 3 \end{cases}$$

und untersuchen Sie, ob die Funktion stetig ist bzw. in ihren Unstetigkeitsstellen stetig ergänzbar ist.

- (e) Gegeben sei die Funktion $f: \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) := \frac{\exp(x^2 - 1) - x^2}{x^{-2} - \exp(1 - x^2)}.$$

Weisen Sie nach, dass die Funktion f in $x = 1$ stetig ergänzbar ist, indem Sie den Grenzwert $f(1) := \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ berechnen. Geben Sie außerdem den Grenzwert $f(-1) := \lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ an, ohne diesen zu berechnen (mit Begründung).

(Prüfungsaufgabe Mathematik IT-3, BTU-Cottbus, WS 2012/13)

(Aufgaben 11.4 und 11.5 - siehe Seite 2)

Aufgabe 11.4 (6 Punkte)

Beweisen Sie unter Verwendung des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung die folgenden Ungleichungen:

(a) $1 - \frac{a}{b} < \ln\left(\frac{b}{a}\right) < \frac{b}{a} - 1$ für $0 < a < b$

(b) $\frac{b-a}{1+b^2} < \arctan(b) - \arctan(a) < \frac{b-a}{1+a^2}$ für $0 \leq a < b$

Aufgabe 11.5 (10 Punkte)

Untersuchen Sie, ob die folgenden Funktionen $f : D \rightarrow W$ umkehrbar sind. Falls ja, dann berechnen Sie die Umkehrfunktion $f^{-1} : W \rightarrow D$, geben Sie den Wertebereich $W \subseteq \mathbb{R}$ von f an und berechnen Sie den Wert der ersten Ableitung von f^{-1} an der Stelle $x_0 = -3$ einerseits direkt mit der Ableitung von f^{-1} , andererseits mit Hilfe des Satzes über die Ableitung der Umkehrfunktion.

(a) $f : [0, \infty) \rightarrow W$ mit $f(x) = \frac{\sqrt{x} - 4}{\sqrt{x} + 1}$

(b) $f : \mathbb{R} \setminus [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \ln(x^2 - 4)$.



Frohe Weihnachten und einen erfolgreichen Start ins Jahr 2014
wünschen die Mitarbeiter des Lehrstuhls für Numerische und Angewandte Mathematik.